2.4. Transformace souřadnic ve fotogrammetrii – matematické základy

Transformace mezi systémy snímkových, modelových a geodetických souřadnic jsou v současné době základem všech metod vyhodnocení jednosnímkové, dvousnímkové a průsekové fotogrammetrie, včetně analytických aerotriangulací a tvorby digitálního ortofota. Jsou součástí analytických a digitálních metod, které řeší vyhodnocení i obecně orientovaných snímků. Nahrazují dnes již nepoužívané principy optických a mechanických konstrukcí analogových strojů.

A. Transformace souřadnic v rovině

Podobnostní transformace provádí dva posuny (ve směru každé z os), jedno otočení (pro obě osy stejné) a změnu měřítka (pro obě osy stejnou) – mění se pouze poloha, natočení a velikost objektů v rovině – tvar zůstává nezměněný (objekty jsou si podobné). Pro vyřešení transformačního klíče je třeba zjistit 4 neznámé a k tomu potřebujeme znát souřadnice alespoň 2 identických bodů v obou soustavách.
Využití: transformace geodetických souřadnic bodů (nebo z místních systémů) do národních souřadnicových systémů (např. S-JTSK).

$X = X_0 + m \cdot (x' \cdot \cos\varepsilon - y' \cdot \sin\varepsilon)$, $Y = Y_0 + m \cdot (x' \cdot \sin\varepsilon + y' \cdot \cos\varepsilon)$ [1]

Afinní transformace provádí dva posuny, dvě (resp. jedno) otočení a dvě změny měřítka (pro každou osu jinou) – mění se poloha, natočení, velikost i tvar objektů v rovině. Pro vyřešení transformačního klíče je třeba zjistit 6 neznámých a k tomu potřebujeme znát souřadnice alespoň 3 identických bodů v obou soustavách.[2]
Využití: transformace (digitalizovaného) měřického snímku na rámové značky pro odstranění diferenční srážky – snímek získává správný rozměr.

$X = X_0 + m_x \cdot (x' \cdot \cos\varepsilon - y' \cdot \sin\varepsilon)$, $Y = Y_0 + m_y \cdot (x' \cdot \sin\varepsilon + y' \cdot \cos\varepsilon)$ [1]

Polynomickou transformaci je možné použít pouze v případě dostatečného množství a vhodného rozmístění identických bodů – jejich minimální počet se rovná polovině počtu neznámých transformačního klíče, který závisí na stupni polynomu (mnohočlenu) n v transformačních rovnicích a je dán vztahem $(n+1)\cdot(n+2)$. Mezi identickými body dochází k poměrně spolehlivé interpolaci souřadnic (tj. polohy) transformovaných bodů – transformace vytváří lokální deformace. Nejvíce se požívají transformační rovnice s polynomy 2. a 3. stupně (min. 6 a 10 identických bodů).[3]

[1] V těchto rovnicích *x'* a *y'* označují souřadnice ve vedlejší soustavě (nikoli snímkové) a *X*, *Y* souřadnice v hlavní soustavě (nikoli geodetické).
[2] Z praktických důvodů se v afinní transformaci používá pouze jedno otočení, jinak by totiž nebyla zachována pravoúhlost os souřadnicové soustavy. Požadavek na minimálně 3 identické body zůstává.
[3] Pokud je polynom prvního stupně (*n=1*) přechází polynomická transformace na afinní (min. 6 identických bodů).

V oblastech mimo identické body (nebo při jejich nevhodném rozložení) dochází k extrapolaci a nová poloha transformovaných bodů je chybná, objevují se deformace velikosti i tvaru zobrazených objektů.
Využití: především v dálkovém průzkumu Země, např. pro umístění (georeferencování) družicových snímků do národních souřadnicových soustav (není třeba znát příslušné kartografického zobrazení).

– *transformace s polynomy 1. stupně (afinní)*

$$X = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot y\,, \qquad Y = b_0 + b_1 \cdot x + b_2 \cdot y$$

– *transformace s polynomy 2. stupně (12 koeficientů transformačního klíče)*

$$X = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot y + a_3 \cdot xy + a_4 \cdot x^2 + a_5 \cdot y^2\,,$$
$$Y = b_0 + b_1 \cdot x + b_2 \cdot y + b_3 \cdot xy + b_4 \cdot x^2 + b_5 \cdot y^2$$

– *transformace s polynomy 3. stupně (20 koeficientů transformačního klíče)*

$$X = a_0 + a_1 \cdot x + a_2 \cdot y + a_3 \cdot xy + a_4 \cdot x^2 + a_5 \cdot y^2 + a_6 \cdot x^2 y + a_7 \cdot xy^2 + a_8 \cdot x^3 + a_9 \cdot y^3$$

$$Y = b_0 + b_1 \cdot x + b_2 \cdot y + b_3 \cdot xy + b_4 \cdot x^2 + b_5 \cdot y^2 + b_6 \cdot x^2 y + b_7 \cdot xy^2 + b_8 \cdot x^3 + b_9 \cdot y^3$$

Kolineární (projektivní) **rovinná transformace** vyjadřuje středové promítání z roviny na rovinu – tedy vztah dvou rovin, kterými jsou ve fotogrammetrii rovina snímku a rovina mapy nebo plánu. Transformační klíč obsahuje osm neznámých, pro jejichž určení potřebujeme znát polohu alespoň 4 identických bodů na snímku i v mapě. Kolineární transformace nezachovává délky, úhly ani plochy. Zachovává pouze *dvojpoměr čtveřice bodové* – tzn. poměr dvou dělících poměrů délkových úseků mezi body na jedné přímce; přitom přímka se zobrazí jako přímka. Tuto skutečnost vyjadřuje také *Pappova věta*: dvojpoměr čtveřice bodové se středovým průmětem z roviny na rovinu nemění.

$$\frac{\dfrac{AC}{BC}}{\dfrac{AD}{BD}} = \frac{\dfrac{A'C'}{B'C'}}{\dfrac{A'D'}{B'D'}}$$

Využití: zásadní význam v jednosnímkové fotogrammetrii pro *překreslení snímku*, které se provádí *kolineární rovinnou transformací rastru* (tj. digitálního nebo digitalizovaného snímku).[4] Transformace mění polohu pixelu v rastrovém digitálním obrazu. Musí být splněn požadavek na rovinatost terénu nebo objektu (bez větších převýšení nebo výstupků), který touto metodou vyhodnocujeme.

$$X_m = \frac{a_1 \cdot x' + a_2 \cdot y' + a_3}{c_1 \cdot x' + c_2 \cdot y' + 1}, \qquad Y_m = \frac{b_1 \cdot x' + b_2 \cdot y' + b_3}{c_1 \cdot x' + c_2 \cdot y' + 1},$$

kde $\boldsymbol{x'}$ a $\boldsymbol{y'}$ jsou souřadnice bodu na snímku, $\boldsymbol{X_m}$ a $\boldsymbol{Y_m}$ jsou souřadnice bodu na mapě, $\boldsymbol{a_i}$, $\boldsymbol{b_i}$, $\boldsymbol{c_i}$ je osm koeficientů transformačního klíče.

B. Transformace souřadnic v prostoru

Ve dvousnímkové a průsekové fotogrammetrii řešíme převod rovinných snímkových souřadnic na prostorové souřadnice geodetické. Pro tento účel využíváme kombinace *středového promítání* (*lineární perspektivy*) mezi rovinou a prostorem s *podobnostní prostorovou transformací* (posunutí, otočení a změna měřítka v prostoru). Pokud obě transformace spojíme do jednoho kroku, získáváme přímý převod mezi snímkovými a geodetickými souřadnicemi pomocí *prostorové projektivní transformace*.[5]

Možné jsou tedy dva postupy:

– *nepřímý převod*: $x', y', x'', y'', -f \rightarrow x, y, z \rightarrow X, Y, Z$ *(pro leteckou fot.)*

$x', z', x'', z'', f \rightarrow x, y, z \rightarrow X, Y, Z$ *(pro pozemní fot.)*

Na dvojici snímků změřené souřadnice x', y', x'', y'' (resp. x', z', x'', z'') mohou být díky známým prvkům vnitřní orientace (f – konstanta komory) pomocí *lineární perspektivy* převedeny na souřadnice modelové x, y, z a dále *podobnostní prostorovou transformací* na souřadnice geodetické X, Y, Z.

– *přímý převod*: $x', y', x'', y'', -f \rightarrow X, Y, Z$ *(pro leteckou fot.)*

$x', z', x'', z'', f \rightarrow X, Y, Z$ *(pro pozemní fot.)*

Na dvojici snímků změřené souřadnice x', y', x'', y'' (resp. x', z', x'', z'') mohou být díky známým prvkům vnitřní orientace (f – konstanta komory) pomocí *prostorové projektivní transformace* převedeny přímo na souřadnice geodetické X, Y, Z.

V případě letecké fotogrammetrie se u konstanty komory f objevuje záporné znaménko, protože její směr je vzhledem k ose z opačný.

[4] Dříve se překreslení provádělo opticko-mechanicky na *překreslovačích*, které musely zajistit zcela stejné vztahy mezi rovinou snímku a rovinou mapy, a to také pomocí 4 identických bodů.
[5] Projekce = promítání. Provádíme středový průmět ze skutečnosti (předmětového prostoru) do roviny snímku (obrazového prostoru) a naopak – z rovinných snímkových souřadnic získáváme prostorové souřadnice geodetické.

Středové promítání – lineární perspektiva

Lineární perspektiva je zvláštním případem *středového promítání*, kdy zobrazujeme část trojrozměrného prostoru (vymezeného rotační kuželovou plochou) do roviny (průmětny), která je kolmá na osu promítání (osu kuželové plochy). Ve fotogrammetrii rozumíme průmětnou rovinu snímku, osou promítání osu záběru a promítací vzdáleností je konstanta komory *f*. Pro systém snímkových a systém modelových souřadnic s počátkem ve středu promítání *O* potom platí:

$$\frac{x'}{f} = \frac{x}{-z}, \qquad \frac{y'}{f} = \frac{y}{-z} \qquad \text{a} \qquad \frac{x''}{f} = \frac{x}{-z}, \qquad \frac{y''}{f} = \frac{y}{-z}$$ *(pro leteckou fot.)* [6]

$$\frac{x'}{f} = \frac{x}{y}, \qquad \frac{z'}{f} = \frac{z}{y} \qquad \text{a} \qquad \frac{x''}{f} = \frac{x}{y}, \qquad \frac{z''}{f} = \frac{z}{y}$$ *(pro pozemní fot.)*

Rovnice vyjadřují vztah mezi rovinnými snímkovými souřadnicemi (x', y', x'', y'' resp. x', z', x'', z''), modelovými souřadnicemi (x, y resp. x, z) a mezi konstantou komory f a prostorovou modelovou souřadnicí (z resp. y).

Využití: ve dvousnímkových metodách, kde umožňuje z měřených rovinných snímkových souřadnic vypočítat prostorové modelové souřadnice bodů. Zohledňuje radiální posuny bodů způsobené středovým promítáním.

Podobnostní prostorová transformace provádí tři posuny (ve směru tří os), otočení okolo tří os a jednu změnu měřítka. Pro vyřešení těchto sedmi neznámých transformačního klíče potřebujeme znát tři souřadnice alespoň u 3 identických bodů v obou soustavách.[7] Tato transformace se také nazývá sedmiprvková. *Využití*: převod souřadnic mezi dvěma prostorovými soustavami modelových a geodetických souřadnic – tj. absolutní orientace modelu.

Prostorovou transformaci lze vyjádřit ve vektorovém zápisu: $X = X_0 + m \cdot R \cdot x$,

kde ***X*** je vektor geodetických souřadnic určovaného bodu (X, Y, Z), $\boldsymbol{X_0}$ je vektor geodetických souřadnic středu vstupní pupily O (X_0, Y_0, Z_0) vyjadřující posuny podél tří os geodetického systému, ***m*** je měřítkový koeficient (jedno číslo shodné pro všechny tři souřadnice), ***R*** je matice rotace popisující otočení (rotaci) kolem tří os a ***x*** je vektor modelových souřadnic určovaného bodu.

Rotační matice $R_{\omega,\varphi,\kappa} = \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} \end{pmatrix}$ obsahuje devět členů $r_{i,j}$ s kombinacemi

sinů a kosinů rotačních úhlů κ, φ, ω (otočení komory a sklony osy záběru).

[6] V rovnicích pro leteckou fotogrammetrii lze záporné znaménko přiřadit buď konstantě komory (-*f*) nebo prostorové souřadnici (-*z*) – jejich směr je opačný.
[7] Teoreticky postačují dva celé body se souřadnicemi X, Y, Z a u třetího bodu jen jedna souřadnice (např. výška Z), tj. celkem sedm číselných hodnot.

- **Příklad použití transformací v prostoru**

Pokud jsou snímky obecně orientované, má systém modelových souřadnic po použití *lineární perspektivy* směr os také v obecném směru – jsou pootočené o hodnoty úhlů κ, φ, ω od výchozích (nulových) směrů. Provede se pouze převod středového promování snímku na pravoúhlé promítání prostorového systému modelových souřadnic.

Po použití *prostorové podobnostní transformace* leží osy geodetického systému ve směru nulových hodnot úhlů κ, φ, ω. Provede se převod mezi pravoúhlým prostorovým systémem modelových a geodetických souřadnic. Promítací rovina je potom v *pozemní fotogrammetrii* svislá ($\omega = 0$), rovnoběžná se základnou ($\varphi = 0$) a osa *Z* leží ve svislém směru ($\kappa = 0$) – získáváme pravoúhlý průmět do roviny, ve které leží osy X, Z ve vodorovném resp. svislém směru a promítací paprsky mají vodorovný směr. V *letecké fotogrammetrii* bude po transformaci promítací rovina vodorovná ($\varphi = 0$ a $\omega = 0$) a osa *X* leží přesně ve směru letu ($\kappa = 0$) – získáváme pravoúhlý průmět do roviny, ve které leží osy X, Y ve vodorovném směru a promítací paprsky mají svislý směr.[8]

Projektivní (kolineární) **prostorová transformace** je základem všech moderních aplikací dvousnímkové fotogrammetrie (analytických a digitálních metod vyhodnocení). Používá se také pro snímkové triangulace a pro tvorbu digitálního orotofota.
Využití: přímý převod mezi rovinnými snímkovými a prostorovými geodetickými souřadnicemi.

Každá snímková dvojice má 12 prvků vnější orientace (tři lineární a tři úhlové pro každý snímek). K jejich přesnému určení potřebujeme znát tři souřadnice alespoň 3 identických bodů v překrytovém území snímkové dvojice.[9] Prvky vnitřní orientace jsou pro měřické snímky známé.

Pokud rozšíříme vztah mezi snímkovými a modelovými souřadnicemi o redukci na polohu hlavního bodu $H'(x_0', y_0')$ dostáváme rovnice:

$$\frac{x'-x_0'}{-f} = \frac{x}{z}\ , \quad \frac{y'-y_0'}{-f} = \frac{y}{z} \qquad \text{pro levý snímek}$$

a pro pravý snímek $\dfrac{x''-x_0''}{-f} = \dfrac{x}{z}\ , \ \dfrac{y''-y_0''}{-f} = \dfrac{y}{z}$.

[8] Uvedený postup popisuje pouze jednu z možností využití převodu mezi systémy souřadnic.
[9] V letecké fotogrammetrii jsou známé jen přibližné hodnoty prvků vnější orientace určované pomocnými zařízeními letecké měřické komory během snímkového letu.

Dosazením do rovnic prostorové podobnostní transformace a jejich úpravou získáváme rovnice pro přímý převod snímkových souřadnic na geodetické:

$$X = X_0^L + (Z - Z_0^L) \cdot \frac{r_{11}^L \cdot (x' - x_0') + r_{12}^L \cdot (y' - y_0') - r_{13}^L \cdot f}{r_{31}^L \cdot (x' - x_0') + r_{32}^L \cdot (y' - y_0') - r_{33}^L \cdot f}$$

$$Y = Y_0^L + (Z - Z_0^L) \cdot \frac{r_{21}^L \cdot (x' - x_0') + r_{22}^L \cdot (y' - y_0') - r_{23}^L \cdot f}{r_{31}^L \cdot (x' - x_0') + r_{32}^L \cdot (y' - y_0') - r_{33}^L \cdot f}, \qquad \textit{(pro levý snímek)}$$

Rovnice obsahují prostorovou souřadnici Z, kterou lze získat jen pomocí dvou snímků. Pro druhý (pravý) snímek platí další soustava rovnic:

$$X = X_0^P + (Z - Z_0^P) \cdot \frac{r_{11}^P \cdot (x'' - x_0'') + r_{12}^P \cdot (y'' - y_0'') - r_{13}^P \cdot f}{r_{31}^P \cdot (x'' - x_0'') + r_{32}^P \cdot (y'' - y_0'') - r_{33}^P \cdot f}$$

$$Y = Y_0^P + (Z - Z_0^P) \cdot \frac{r_{21}^P \cdot (x'' - x_0'') + r_{22}^P \cdot (y'' - y_0'') - r_{23}^P \cdot f}{r_{31}^P \cdot (x'' - x_0'') + r_{32}^P \cdot (y'' - y_0'') - r_{33}^P \cdot f}, \qquad \textit{(pro pravý snímek)}$$

Po určení prvků transformačního klíče (přesných hodnot vnější orientace snímků) lze řešením soustavy čtyř rovnic o třech neznámých získávat z rovinných souřadnic měřených na dvou snímcích tři prostorové geodetické souřadnice každého bodu. V rovnicích jsou označeny:

x‘, y‘, x“, y“ … měřené ***snímkové souřadnice*** na levém a pravém snímku,

známé ***prvky unitřní orientace***:

f … konstanta komory,

x_0‘, y_0‘, x_0“, y_0“ … poloha hlavního bodu ***H‘*** na levém snímku a poloha hlavního bodu ***H“*** na pravém snímku (pokud byla použita stejná měřická komora jsou souřadnice obou bodů totožné),

transformační klíč, tzn. ***prvky vnější orientace*** každého snímku:

X_0^L, Y_0^L, Z_0^L … geodetické souřadnice středu vstupní pupily levého snímku,
X_0^P, Y_0^P, Z_0^P … geodetické souřadnice středu vstupní pupily pravého snímku,

r_{ij}^P … prvky matice rotace obsahující kombinace sinů a kosinů rotačních úhlů κ, φ, ω (otočení komory a sklony osy záběru) pravého snímku,
r_{ij}^L … prvky matice rotace obsahující kombinace sinů a kosinů rotačních úhlů κ, φ, ω (otočení komory a sklony osy záběru) levého snímku,

výsledné hodnoty:

X, Y, Z … ***geodetické souřadnice*** určovaného bodu

Pro pozemní fotogrammetrii nabývají rovnice tohoto tvaru:

$$X = X_0^L + (Y - Y_0^L) \cdot \frac{r_{11}^L \cdot (x' - x_0') + r_{12}^L \cdot (z' - z_0') + r_{13}^L \cdot f}{r_{31}^L \cdot (x' - x_0') + r_{32}^L \cdot (z' - z_0') + r_{33}^L \cdot f}$$

$$Z = Z_0^L + (Y - Y_0^L) \cdot \frac{r_{21}^L \cdot (x' - x_0') + r_{22}^L \cdot (z' - z_0') + r_{23}^L \cdot f}{r_{31}^L \cdot (x' - x_0') + r_{32}^L \cdot (z' - z_0') + r_{33}^L \cdot f}$$

$$X = X_0^P + (Y - Y_0^P) \cdot \frac{r_{11}^P \cdot (x'' - x_0'') + r_{12}^P \cdot (z'' - z_0'') + r_{13}^P \cdot f}{r_{31}^P \cdot (x'' - x_0'') + r_{32}^P \cdot (z'' - z_0'') + r_{33}^P \cdot f}$$

$$Z = Z_0^P + (Y - Y_0^P) \cdot \frac{r_{21}^P \cdot (x'' - x_0'') + r_{22}^P \cdot (z'' - z_0'') + r_{23}^P \cdot f}{r_{31}^P \cdot (x'' - x_0'') + r_{32}^P \cdot (z'' - z_0'') + r_{33}^P \cdot f}$$

Direktní (přímá) **lineární transformace** (**DLT**) se používá v případech, kdy pro snímky nejsou prvky vnitřní orientace (PVO) *f*, *H‘ (x_0‘, y_0‘)* známé (např. u neměřických komor, historických snímků nebo výřezů snímků s neznámou polohou středu). Pro vyřešení 11 prvků transformačního klíče (koeficientů $\boldsymbol{a_i}$, $\boldsymbol{b_i}$, $\boldsymbol{c_j}$) je třeba znát souřadnice alespoň 6 vlícovacích bodů. Protože hledáme prostorové geodetické souřadnice (***X***, ***Y***, ***Z***), potřebujeme pro každý bod měřené snímkové souřadnice alespoň ze dvou snímků (***x‘***, ***y‘***, ***x“***, ***y“***): stereoskopických dvojic dvousnímkové fotogrammetrie nebo obecně orientovaných snímků průsekové fotogrammetrie. *Využití*: přímý převod mezi snímkovými a geodetickými souřadnicemi (také pro neměřické snímky nebo průsekové záběry) a pro určení neznámých prvků vnitřní orientace (PVO) – tj. pro kalibraci komory.

Transformační rovnice vznikly zobecněním kolineární transformace:

$$x' = \frac{a_1 \cdot X + a_2 \cdot Y + a_3 \cdot Z + a_4}{c_1 \cdot X + c_2 \cdot Y + c_3 \cdot Z + 1}$$

$$y' = \frac{b_1 \cdot X + b_2 \cdot Y + b_3 \cdot Z + b_4}{c_1 \cdot X + c_2 \cdot Y + c_3 \cdot Z + 1}$$

Prvky vnitřní orientace lze ze známých koeficientů transformačního klíče určit pomocí těchto rovnic:

$$x_0' = (a_1 \cdot c_1 + a_2 \cdot c_2 + a_3 \cdot c_3) \cdot d^2, \qquad y_0' = (b_1 \cdot c_1 + b_2 \cdot c_2 + b_3 \cdot c_3) \cdot d^2, \qquad \text{kde } d^2 = \frac{1}{c_1^2 + c_2^2 + c_3^2}$$

$$f = \frac{f_x + f_y}{2}, \text{ kde } \quad f_x = \sqrt{(a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) \cdot d^2 - x_0'^2} \quad \text{a} \quad f_y = \sqrt{(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) \cdot d^2 - y_0'^2}$$