Střední průmyslová škola zeměměřická

GEODETICKÉ VÝPOČTY

2. část

Ing. Danuše Mlčková

Úvod

Text navazuje na 1. část, je určen pro studenty 2. až 4. ročníku středních průmyslových škol se zaměřením na geodézii. Jedná se o přepracovanou učebnici Geodetické počtářství do elektronické podoby s ohledem na dnešní technické vybavení a platné předpisy.

Označování využívané v textu je vysvětleno u jednotlivých kapitol.

Tento text bude dle potřeby průběžně aktualizován.

Obsah:

1. Výpočet výměr 4
1.1. Výpočet výměr 4
1.1.1. výpočet rozkladem 4
1.1.2. výpočet ze souřadnic 9
1.2. Vyrovnání hranice 17
1.2.1. vyrovnání hranice bodem 17
1.2.2. vyrovnání hranice daným směrem 19
1.3. Dělení pozemků 25
2. Trigonometrické určování výšek 31
2.1. Odvození zenitové vzdálenosti 31
2.2. Určení výšky předmětu 32
2.2.1. předmět s patou přístupnou 33
2.2.2. předmět s patou nepřístupnou 36
2.3. Určení nadmořské výšky bodu 40
2.4. Vliv zakřivení Země a refrakce na výškové rozdíly 43
3. Výpočet kubatur 51
3.1. Výpočet kubatur ze čtvercové sítě 52
3.1.1. výpočet výšky terénu 52
3.1.2. výpočet kubatury 52
3.1.3. výpočet kubatury v kubaturní mapě 53
3.2. Výpočet kubatur z profilů 53
3.3. Výpočet kubatur z vrstevnicového plánu 54
4. Vyrovnávací počet 55
4.1. Charakteristiky měřických chyb 55
4.2. Charakteristiky přesnosti měření 56
4.3. Vlastnosti nahodilých chyb 57
4.4. Základy vyrovnávacího počtu 59
4.4.1. vyrovnání pozorování přímých stejné váhy 60
4.4.2. vyrovnání pozorování přímých nestejné váhy 63
4.4.3. měřické dvojice 64

1. Výpočet výměr

Pod pojmem výpočet výměr rozumíme určení plochy mnohoúhelníků, které jsou obrazem jednotlivých pozemků. Výpočet lze provádět rozkladem na jednoduché geometrické obrazce, jejichž obsahy počítáme podle vzorců. Při znalosti souřadnic všech lomových bodů využíváme výpočet výměr ze souřadnic (L` Huillierovy vzorce). Na základě známých ploch provádíme potom např. vyrovnání hranice a dělení pozemků.

1.1. Výpočet výměr

1.1.1. výpočet rozkladem

Určovaný obrazec vhodně rozdělíme na trojúhelníky, lichoběžníky a čtyřúhelníky; vypočteme plochy jednotlivých obrazců a sečteme.
Zpravidla počítáme dvojnásobnou plochu a teprve výsledný součet dělíme 2.

Přehled vzorců:

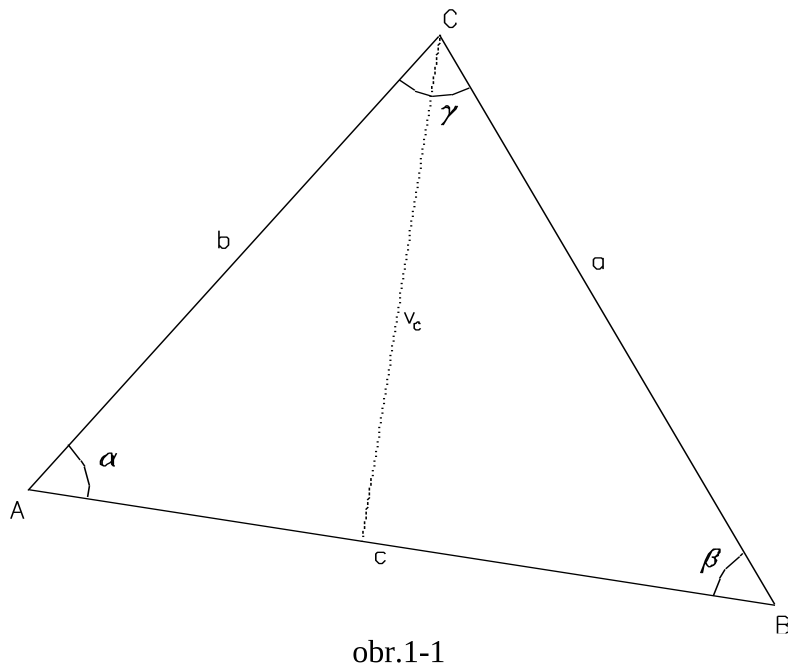
obsah trojúhelníka: $2P = a \cdot v_a = b \cdot v_b = c \cdot v_c$

$$2P = a \cdot b \cdot \sin\gamma = b \cdot c \cdot \sin\alpha = a \cdot c \cdot \sin\beta$$

$$2P = \frac{c^2 \sin\alpha \sin\beta}{\sin(\alpha + \beta)}$$

$$2P = 2\sqrt{s(s-a)\cdot(s-b)\cdot(s-c)}, \text{ kde } s = \frac{a+b+c}{2}$$

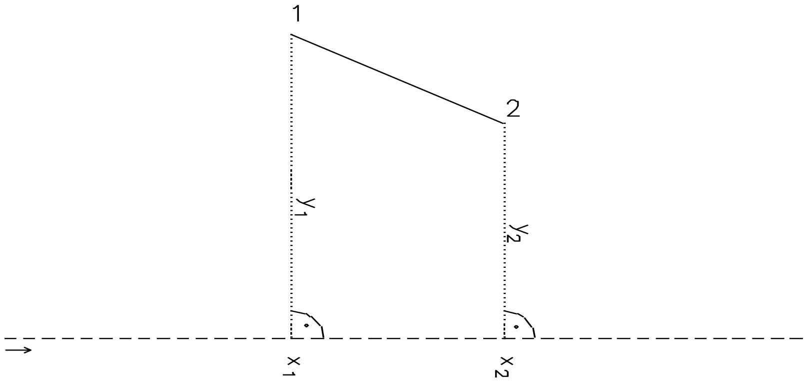
$$2P = a \cdot b \text{ (pravoúhlý trojúhelník)}$$



obr.1-1

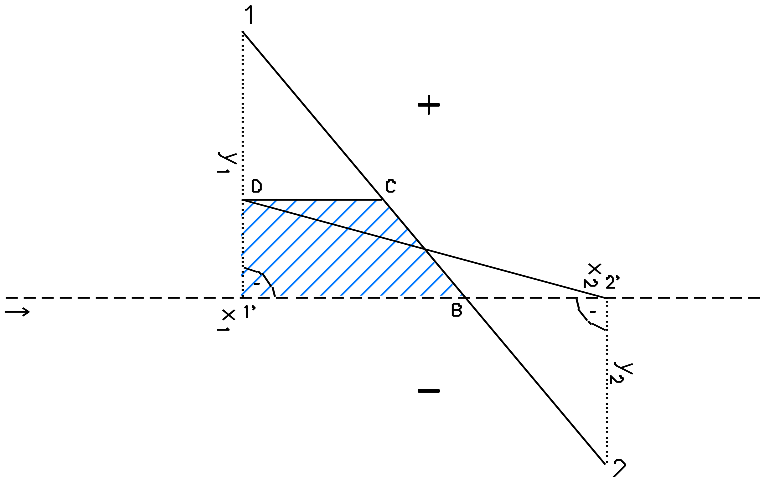
obsah lichoběžníka: 2P = $(z_1 + z_2) \cdot v$, kde z_1, z_2 jsou základny; v je výška

2P = $(y_1 + y_2) \cdot (x_2 - x_1)$



obr.1-2

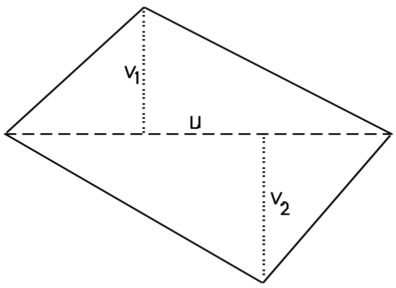
Pokud jsou body na opačných stranách měřické přímky (tzv. zvrhlý lichoběžník) dosadíme jednu kolmici se znaménkem – (zápornou). Vypočteme rozdíl ploch Δ1B1' a Δ2B2', tj. plochu □DCB1'.



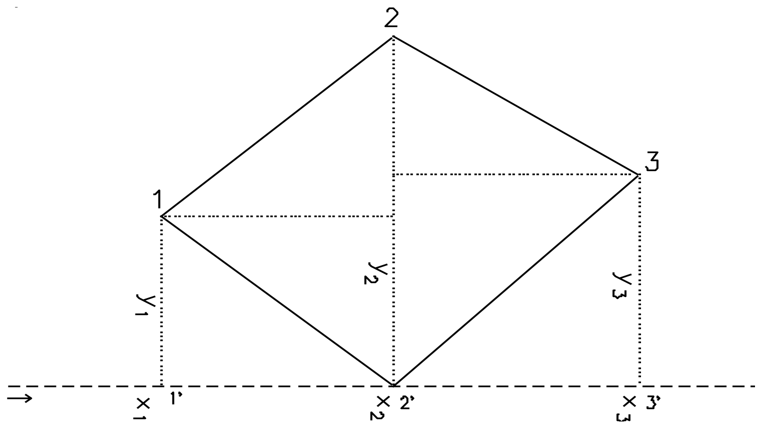
obr.1-3

obsah čtyřúhelníka: 2P = $u \cdot v_1 + u \cdot v_2 = u \cdot (v_1 + v_2)$ (obr.1-4)

2P = $y_2.(x_2 - x_1) + y_2.(x_3 - x_2) = y_2 \cdot (x_3 - x_1)$ (obr.1-5)



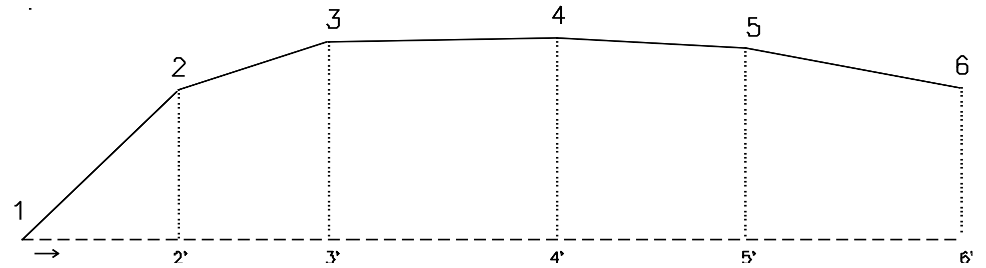
obr.1-4



obr.1-5

Rozklad složitějších obrazců provedeme dvojím způsobem:

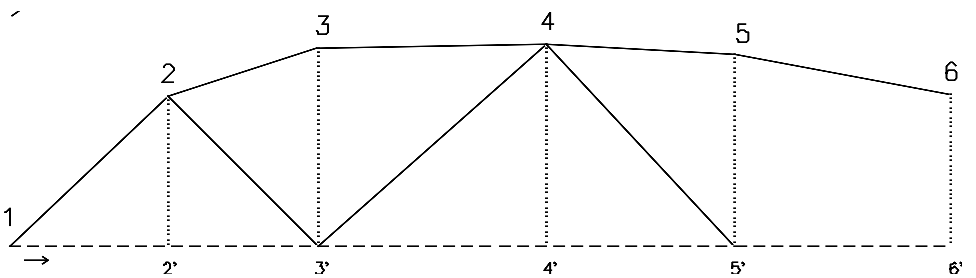
1. ponecháme rozdělení, které vytvoří kolmice z měření



obr.1-6

Výpočet se skládá z výpočtu ploch trojúhelníka a lichoběžníků.

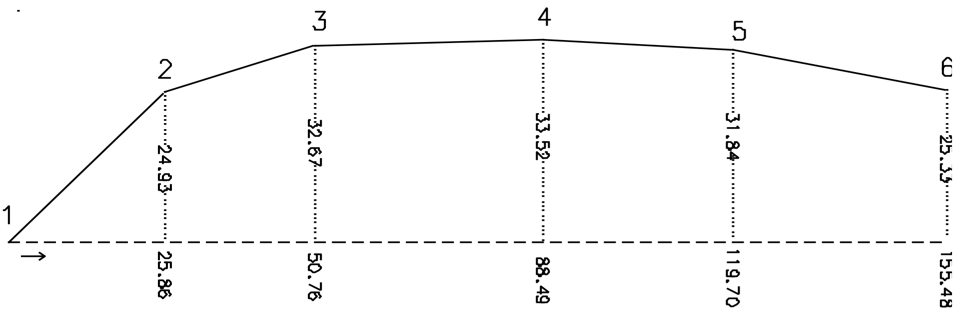
2. dělicí čáru vedeme z bodu na obvodu na patu kolmice následujícího bodu a opět na následující bod na obvodu



obr.1-7

Výpočet se skládá z výpočtu ploch trojúhelníků a čtyřúhelníků.

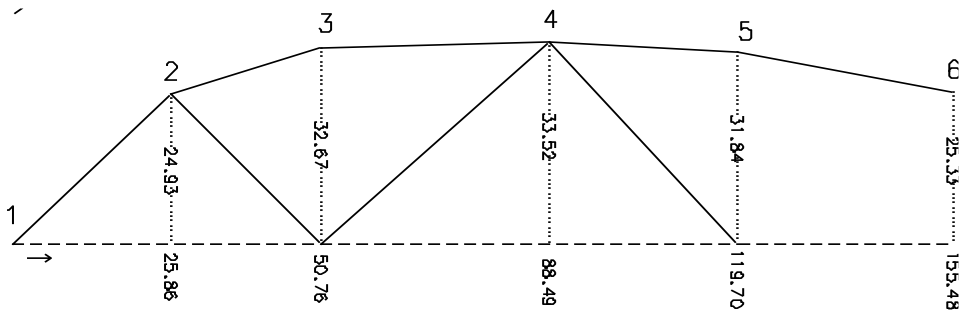
Příklad 1.1: Vypočtěte výměru obrazce ohraničeného lomenou hranicí 1 až 6, měřickou přímkou a kolmicí bodu 6 (obr.1-8 a obr.1-9).



obr.1-8

$$1.\ 2P = 25{,}86 \cdot 24.93 + (50{,}76 - 25{,}86) \cdot (32{,}67 + 24{,}93) + (88{,}49 - 50{,}76) \cdot (33{,}52 + 32{,}67) +$$
$$+ (119{,}70 - 88{,}49) \cdot (31{,}84 + 33{,}52) + (155{,}48 - 119{,}70) \cdot (25{,}33 + 31{,}84) = 8\ 661{,}7067 m^2$$

$P = 4\ 330{,}85 m^2$



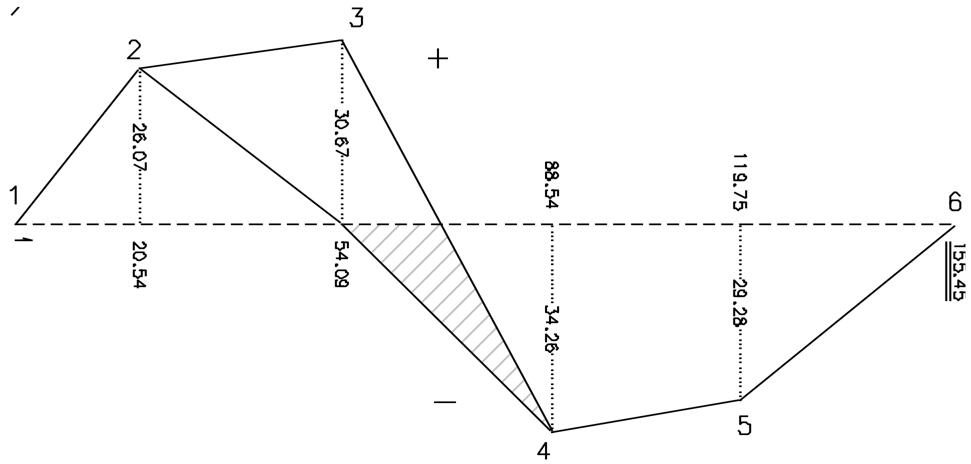
obr.1-9

2. $2P = 50{,}76 \cdot 24{,}93 + (88{,}49 - 25{,}86) \cdot 32{,}67 + (119{,}70 - 50{,}76) \cdot 33{,}52 +$
$+ (155{,}48 - 88{,}49) \cdot 31{,}84 + (155{,}48 - 119{,}70) \cdot 25{,}33 = 8\,661{,}7067 m^2$

$P = 4\,330{,}85 m^2$

Pokud leží body po obou stranách měřické přímky, volíme při výpočtu rozkladem plochy po jedné straně kladné a po druhé záporné (vlevo kladné, vpravo záporné).

Příklad 1.2: Vypočtěte plochu mnohoúhelníka při měřické přímce 1-6 (obr.1-10).



obr.1-10

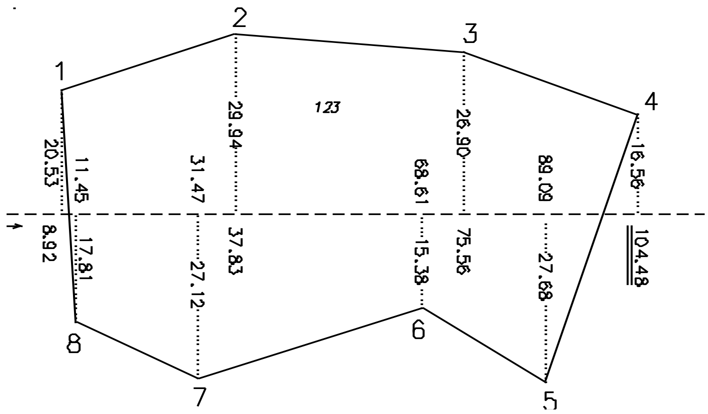
1. $2P = 20{,}54 \cdot 26{,}07 + (54{,}09 - 20{,}54) \cdot (30{,}67 + 26{,}07) + (88{,}54 - 54{,}09) \cdot (30{,}67 - 34{,}26) -$
$- (119{,}75 - 88{,}54) \cdot (29{,}28 + 34{,}26) - (155{,}45 - 119{,}75) \cdot 29{,}28 = -712{,}9501 m^2$

$P = -356{,}48 m^2$

2. $2P = 54{,}09 \cdot 26{,}07 + (88{,}54 - 20{,}54) \cdot 30{,}67 - (119{,}75 - 54{,}09) \cdot 34{,}26 -$
$- (155{,}45 - 88{,}54) \cdot 29{,}28 = -712{,}9501 m^2$

$P = -356{,}48 m^2$

Příklad 1.3: Vypočtěte výměru pozemkové parcely č. *123* (obr.1-11).

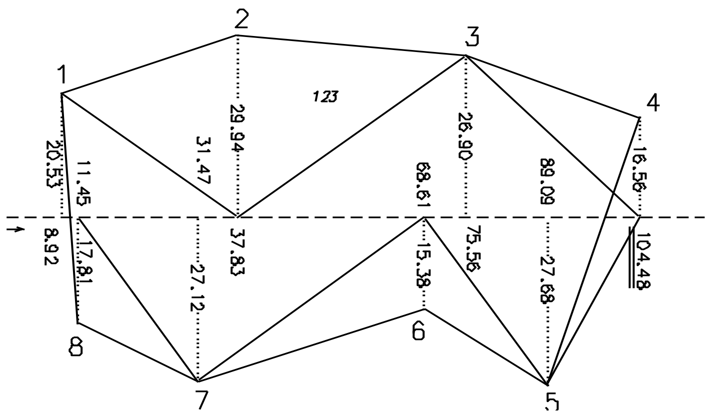


obr.1-11

U bodů 1, 4 při výpočtu zvrhlého lichoběžníka je kolmice záporná, protože leží vně uzavřeného obrazce.

$$
\begin{aligned}
1.\ 2P = {} & (37{,}83-8{,}92)\cdot(29{,}94+20{,}53)+(75{,}56-37{,}83)\cdot(26{,}90+29{,}94)+ \\
& +(104{,}48-75{,}56)\cdot(16{,}56+26{,}90)+(104{,}48-89{,}09)\cdot(27{,}68-16{,}56)+ \\
& +(89{,}09-68{,}61)\cdot(27{,}68+15{,}38)+(68{,}61-31{,}47)\cdot(15{,}38+27{,}12)+ \\
& +(31{,}47-11{,}45)\cdot(27{,}12+17{,}81)+(11{,}45-8{,}92)\cdot(17{,}81-20{,}53)=8\,384{,}5967\ \mathrm{m}^2
\end{aligned}
$$

$P = 4\,192{,}30\ \mathrm{m}^2$



obr.1-12

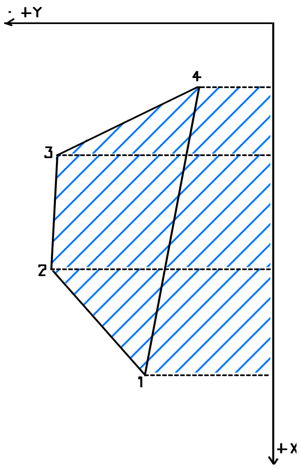
$$
\begin{aligned}
2.\ 2P = {} & (37{,}83-11{,}45)\cdot 20{,}53+(75{,}56-8{,}92)\cdot 29{,}94+(104{,}48-37{,}83)\cdot 26{,}90+ \\
& +(89{,}09-75{,}56)\cdot 16{,}56+(104{,}48-68{,}61)\cdot 27{,}68+(89{,}09-31{,}47)\cdot 15{,}38+ \\
& +(68{,}61-11{,}45)\cdot 27{,}12+(31{,}47-8{,}92)\cdot 17{,}81=8\,384{,}5967\ \mathrm{m}^2
\end{aligned}
$$

$P = 4\,192{,}30\ \mathrm{m}^2$

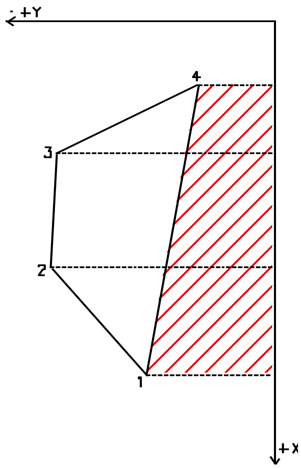
1.1.2. výpočet ze souřadnic

Pokud jsou vrcholy mnohoúhelníka zadány pravoúhlými souřadnicemi, lze pro výpočet použít L` Huillierovy vzorce.

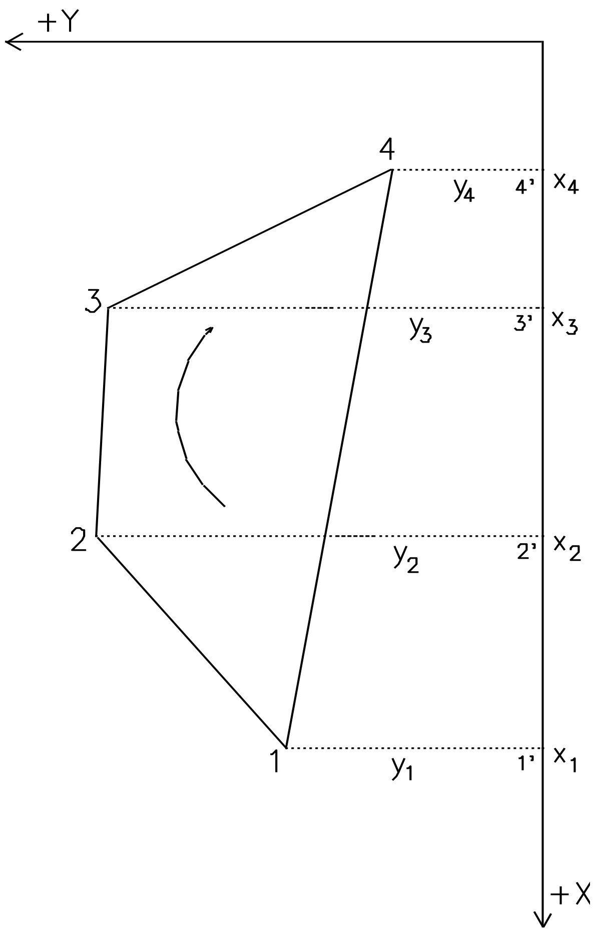
Odvodíme je pomocí ploch lichoběžníků vytvořených hranicemi mnohoúhelníka a souřadnicovou osou +X.



obr.1-13



obr.1-14



obr.1-15

2P = 2P□122'1'+ 2P□233'2'+2P□344'3'– 2P□411'4'

2P = $(y_1 + y_2)\cdot(x_1 - x_2) + (y_2 + y_3)\cdot(x_2 - x_3) + (y_3 + y_4)\cdot(x_3 - x_4) - (y_1 + y_4)\cdot(x_1 - x_4)$

po vynásobení

2P = $y_1x_1 + y_2x_1 - y_1x_2 - y_2x_2 + y_2x_2 + y_3x_2 - y_2x_3 - y_3x_3 + y_3x_3 + y_4x_3 - y_3x_4 - y_4x_4 -$
$- y_1x_1 - y_4x_1 + y_1x_4 + y_4x_4$

součiny se stejnými indexy se odečtou a ostatní můžeme uspořádat nejprve podle x ,
pak podle y

podle ***x***:

2P = $x_1(y_2 - y_4) + x_2(y_3 - y_1) + x_3(y_4 - y_2) + x_4(y_1 - y_3)$; a obecně lze pro n-úhelník psát

2P = $\sum x_n(y_{n+1} - y_{n-1}) = \sum x_n \cdot \Delta y_n$;

[1.1]

kde $\Delta y_n = y_{n+1} - y_{n-1}$

podle ***y***:

2P = $y_1(x_4 - x_2) + y_2(x_1 - x_3) + y_3(x_2 - x_4) + y_4(x_3 - x_1)$; a obecně lze pro n-úhelník psát

2P = $\sum y_n(x_{n-1} - x_{n+1}) = \sum y_n \cdot \Delta x_n$; [1.2]

kde $\Delta x_n = x_{n-1} - x_{n+1}$

Z odvození vyplývá, že $\sum \Delta x = 0$; $\sum \Delta y = 0$; tyto rovnice použijeme při číselném výpočtu ke kontrole.

Při číselném výpočtu je třeba dodržovat základní pravidla:

1) výpočet provádět s vhodně redukovanými souřadnicemi (redukce nemá vliv na výsledek)
2) obrazec musí být uzavřený, předepsaný ve směru pohybu hodinových ručiček
3) při předpisu proti pohybu hodinových ručiček vyjde obsah záporný
4) je-li obrazec v různých kvadrantech, nemá to vliv na znaménko ani velikost obsahu, pokud dodržíme pravidlo 2)
5) při předpisu pro číselný výpočet je vhodné po uzavření obrazce zopakovat ještě další bod pro výpočet souřadnicových rozdílů – 1,2,3,4,1,2

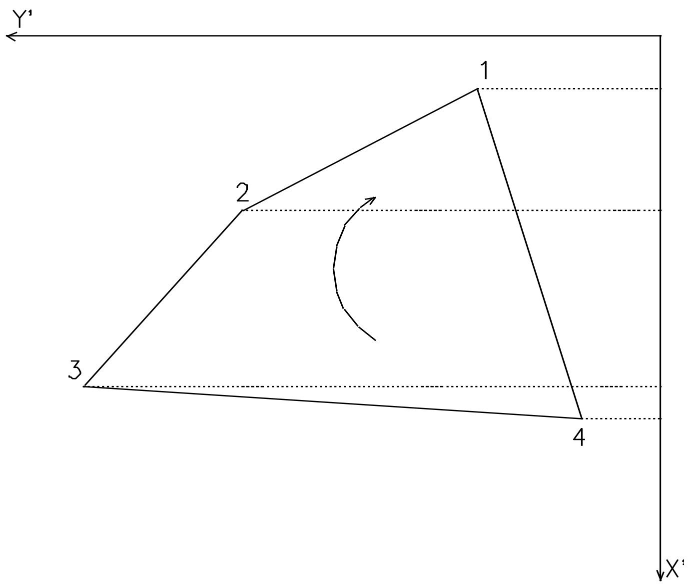
Příklad 1.4: Vypočtěte výměru mnohoúhelníka (obr.1-16).

1) zobrazte zadané body ve vhodném měřítku, souřadnice vhodně redukujte
2) předepište obrazec po směru pohybu hodinových ručiček
3) vypočtěte výměru mnohoúhelníka

Bod	Y	X
1	739 750,76	1 014 142,87
2	739 945,21	1 014 243,54
3	740 075,73	1 014 389,33
4	739 664,78	1 014 416,23

Y – redukujeme o 739 600 m, X – redukujeme o 1 014 100 m a zvolíme vhodné měřítko pro zobrazení – 1: 5000

Bod	Y´	X´
1	150,76	42,87
2	345,21	143,54
3	475,73	289,33
4	64,78	316,23



obr.1-16

Obrazec předepíšeme po směru pohybu hodinových ručiček, uzavřeme a pro snadnější výpočet zopakujeme ještě druhý bod.

Bod	Y´	X´
1	150,76	42,87
4	64,78 –	× 316,23
3	475,73	289,33
2	345,21	143,54
1	150,76	42,87
4	64,78	316,23

Bod	Y´	X´
1	150,76	42,87
4	64,78 ×	– 316,23
3	475,73	289,33
2	345,21	143,54
1	150,76	42,87
4	64,78	316,23

Vypočteme dvojnásobnou plochu pomocí L'Huillierových vzorců – rovnice [1.1], [1.2]

$$2P = \sum x_n (y_{n+1} - y_{n-1}) = \sum x_n \cdot \Delta y_n$$
$$2P = \sum y_n (x_{n-1} - x_{n+1}) = \sum y_n \cdot \Delta x_n$$

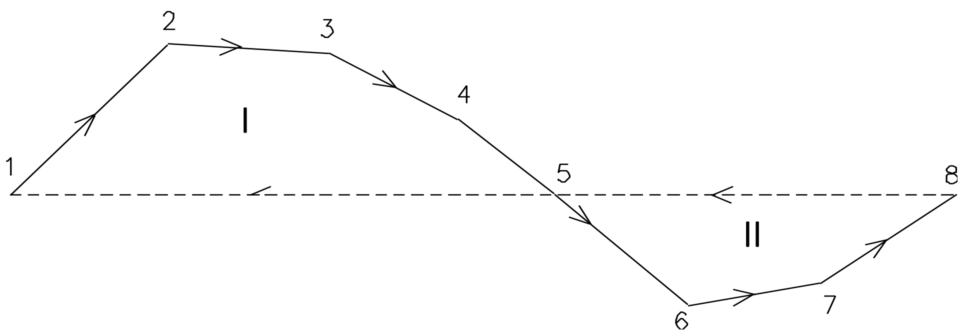
$$2P = 316{,}23 \cdot (475{,}73 - 150{,}76) + 289{,}33 \cdot (345{,}21 - 64{,}78) + 143{,}54 \cdot (150{,}76 - 475{,}73) + \\ + 42{,}87 \cdot (64{,}78 - 345{,}21) = 125\,233{,}8471 \text{ m}^2$$

$$2P = 64{,}78 \cdot (42{,}87 - 289{,}33) + 475{,}73 \cdot (316{,}23 - 143{,}54) + 345{,}21 \cdot (289{,}33 - 42{,}87) + \\ + 150{,}76 \cdot (143{,}54 - 316{,}23) = 125\,233{,}8471 \text{ m}^2$$

$P = 62\,617 \text{ m}^2$

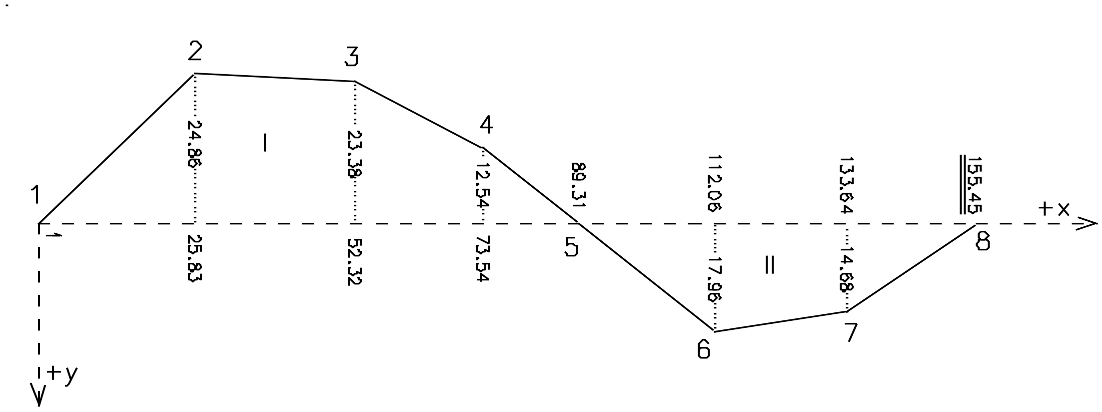
Výsledek dvojnásobné výměry musí být v obou případech stejný, vypočteme výměru a tu zaokrouhlíme na m^2 .

Obsah zvrhlých mnohoúhelníků – obrazec popíšeme po obvodě, část I (1-2-3-4-5-1) je předepsána ve směru pohybu ručiček hodinových – obsah vyjde kladný; část II (5-6-7-8-5) je předepsána proti směru pohybu ručiček hodinových – obsah vyjde záporný. L'Huillierovy vzorce dávají hodnotu I+II (tj. rozdíl ploch I a II).



obr.1-17

Do měřické přímky vložíme osu +x, osu +y určíme podle zásady pro orientaci os, předepíšeme obrazec při měřické přímce 1-8 (obr.1-18) a L'Huillierovými vzorci vypočteme výměru I+II.



obr.1-18

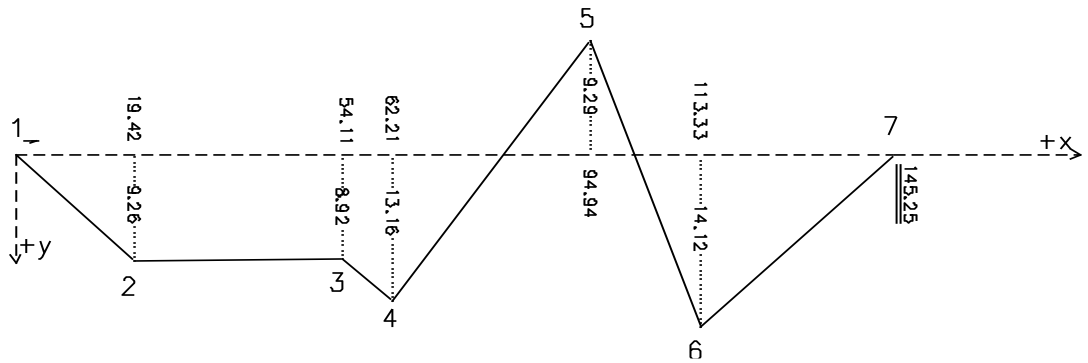
Bod	y	x
1	0,00	0,00
2	-24,86	25,83
3	-23,38	52,32
4	-12,54	73,54
5	0,00	89,31
6	17,96	112,06
7	14,68	133,64
8	0,00	155,45
1	0,00	0,00
2	-24,86	25,83

Bod	y	x
1	0,00	0,00
2	-24,86	25,83
3	-23,38	52,32
4	-12,54	73,54
5	0,00	89,31
6	17,96	112,06
7	14,68	133,64
8	0,00	155,45
1	0,00	0,00
2	-24,86	25,83

2P = 1 446,8576 m^2
P = 723,43 m^2

2P = 1 446,8576 m^2
P = 723,43 m^2

Příklad 1.5: Vypočtěte výměru mnohoúhelníka při měřické přímce 1-7 (obr.1-19).



obr.1-19

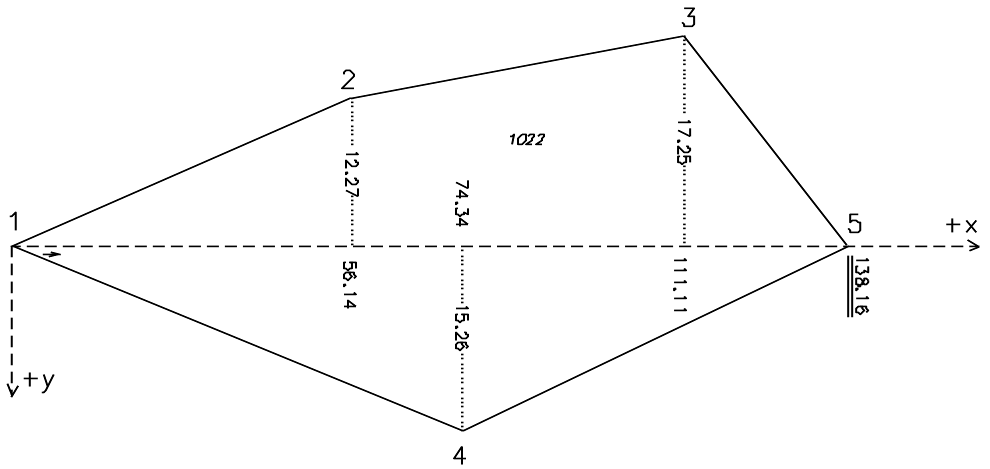
Bod	y	x
1	0,00	0,00
2	9,26	19,42
3	8,92	54,11
4	13,16	62,21
5	-9,29	94,94
6	14,12	113,33
7	0,00	145,25
1	0,00	0,00
2	9,26	19,42

Bod	y	x
1	0,00	0,00
2	9,26	19,42
3	8,92	54,11
4	13,16	62,21
5	-9,29	94,94
6	14,12	113,33
7	0,00	145,25
1	0,00	0,00
2	9,26	19,42

2P = -1655,5406 m^2
P = -827,77 m^2

2P = -1655,5406 m^2
P = -827,77 m^2

Příklad 1.6: Vypočtěte výměru parcely *1022* (obr.1-20).



obr.1-20

Bod	y	x
1	0,00	0,00
2	-12,27	56,14
3	-17,25	111,11
5	0,00	138,16
4	15,26	74,34
1	0,00	0,00
2	-12,27	56,14

Bod	y	x
1	0,00	0,00
2	-12,27	56,14
3	-17,25	111,11
5	0,00	138,16
4	15,26	74,34
1	0,00	0,00
2	-12,27	56,14

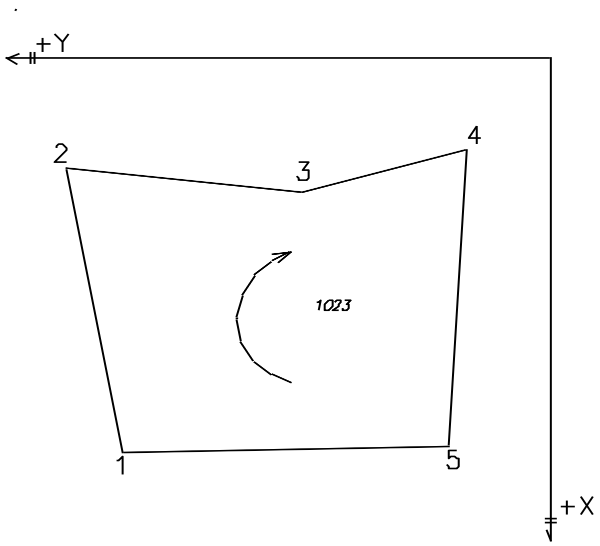
2P = 4 886,4863 m^2
P = 2 443,24 m^2

2P = 4 886,4863 m^2
P = 2 443,24 m^2

Příklad 1.7: Vypočtěte výměru parcely *1023* ze souřadnic v S-JTSK (obr.1-21).

Bod	Y	X
1	732 914,26	1 012 748,28
2	733 007,92	1 012 574,24
3	732 805,66	1 012 633,12
4	732 674,41	1 012 506,37
5	732 739,96	1 012 739,29

Souřadnice pro výpočet redukujeme $Y_0 = 732\ 600$m; $X_0 = 1\ 012\ 500$m a body zobrazíme.



obr.1-21

Bod	Y´	X´
1	314,26	248,28
2	407,92	74,24
3	205,66	133,12
4	74,41	6,37
5	139,96	239,29
1	314,26	248,28
2	407,92	74,24

Bod	Y´	X´
1	314,26	248,28
2	407,92	74,24
3	205,66	133,12
4	74,41	6,37
5	139,96	239,29
1	314,26	248,28
2	407,92	74,24

$2P = 71\ 044{,}9911\ m^2$
$P = 35\ 522{,}50\ m^2$

$2P = 71\ 044{,}9911\ m^2$
$P = 35\ 522{,}50\ m^2$

Výpočet provádíme vždy pro kontrolu podle obou vzorců.

Poznámka: L'Huillierovy vzorce lze upravit i jiným způsobem a nejprve pouze součiny sečíst a potom odečítat. Výpočet je bez kontroly.

$$2P = \sum x_n (y_{n+1} - y_{n-1}) = \sum x_n \cdot y_{n+1} - \sum x_n \cdot y_{n-1}$$
$$2P = \sum y_n (x_{n-1} - x_{n+1}) = \sum y_n \cdot x_{n-1} - \sum y_n \cdot x_{n+1}$$

Obě rovnice dávají shodný výsledek – ukázka na příkladu 1.4.
Výpočet je tedy bez kontroly.

Bod	Y´	X´
1	150,76 +	× 42,87
4	64,78 +	× 316,23
3	475,73 +	× 289,33
2	345,21 +	× 143,54
1	150,76	42,87

Bod	Y´	X´
1	150,76 ×	42,87
4	64,78 ×	− 316,23
3	475,73 ×	− 289,33
2	345,21 ×	− 143,54
1	150,76	− 42,87

$$2P = 150{,}76 \cdot 143{,}54 + 345{,}21 \cdot 289{,}33 + 475{,}73 \cdot 316{,}23 + 64{,}78 \cdot 42{,}87 -$$
$$- 42{,}87 \cdot 345{,}21 - 143{,}54 \cdot 475{,}73 - 289{,}33 \cdot 64{,}78 - 316{,}23 \cdot 150{,}76 =$$
$$= 125\ 233{,}8471 \text{ m}^2$$

$$P = 62\ 617 \text{ m}^2$$

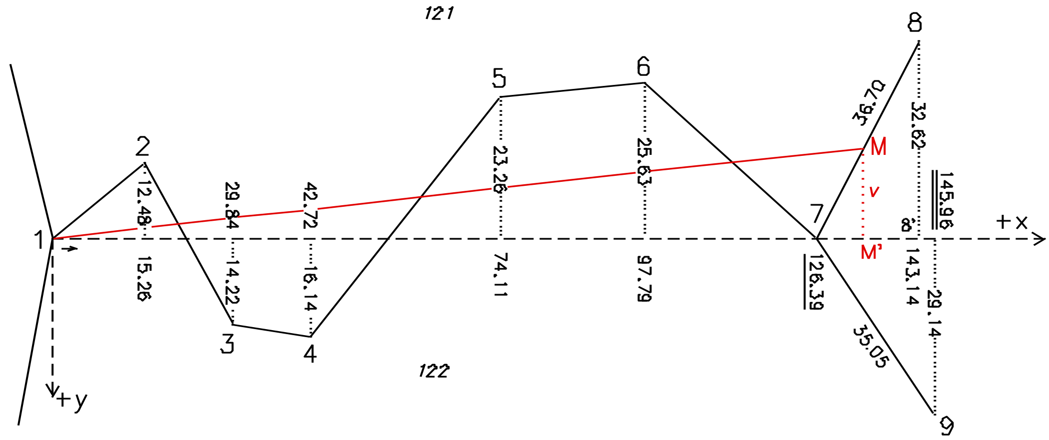
1.2. Vyrovnání hranice

Je potřeba nahradit lomenou hranici mezi pozemky hranicí přímou tak, aby se výměra pozemků nezměnila. Předpokládáme, že hodnota směňovaných částí pozemků je stejná. Požadujeme, aby nová hranice procházela zvoleným bodem nebo měla daný směr. Úkolem je vypočítat vytyčovací prvky pro vytyčení nové přímé hranice v terénu. Při výpočtu vytyčovacích prvků ponecháme výměru na celý počet desetinných míst, abychom zajistili požadovanou přesnost prvků (prvky 2 desetinná místa →plocha 4 desetinná místa).

1.2.1. vyrovnání hranice bodem

Lomenou hranici zaměříme na vhodně zvolenou měřickou přímku, která vychází ze zadaného bodu a prochází přibližně místem nového rozdělení. Postup výpočtu si vysvětlíme na příkladu.

Příklad 1.8: Vypočtěte vytyčovací prvky pro vytyčení přímé hranice mezi pozemky *121* a *122* (obr.1-22).



obr.1-22

Postup výpočtu:

1) vypočteme L'Huillierovými vzorci výměru mnohoúhelníka určeného vrcholy 1 až 7
2) při kladném výsledku je větší plocha po levé straně měřické přímky, proto nová dělicí hranice bude na přímce *78*; při záporném výsledku je větší plocha po pravé straně měřické přímky, proto nová dělicí hranice bude na přímce *79*; při nulovém výsledku je měřická přímka novou dělicí hranicí
3) výměra mnohoúhelníka je stejná jako výměra trojúhelníka Δ1M7
4) vypočteme vytyčovací prvky pro bod M (výšku *v*, tj. kolmici $\overline{MM'}$, staničení $\overline{1M'}$, délku $\overline{7M}$, případně $\overline{8M}$ po původní hranici a délku $\overline{1M}$ nové hranice (pro výpočet využíváme podobnost trojúhelníků)
5) kontrolně vypočteme výměru trojúhelníka Δ1M7
6) pokud známe všechny lomové body parcel, vypočteme kontrolně výměry parcel – původní i nové

$2P_{\Delta 1M7}$ = $\overline{17} \cdot v$; $\overline{MM'} = v = \dfrac{2P}{\overline{17}}$; $\overline{7M'} = \dfrac{\overline{MM'} \cdot \overline{78'}}{\overline{88'}}$; $\overline{7M} = \dfrac{\overline{MM'} \cdot \overline{78}}{\overline{88'}}$;

$$\overline{1M} = \sqrt{\overline{1M'}^2 + \overline{MM'}^2}$$

pro kontrolu $\overline{7M} = \sqrt{\overline{MM'}^2 + \overline{7M'}^2}$; $2P_{\Delta 1M7}$ = $\overline{17} \cdot \overline{MM'}$

Číselný výpočet:

Bod	y	x
1	0,00	0,00
2	-12,48	15,26
3	14,22	29,84
4	16,14	42,72
5	-23,26	74,11
6	-25,63	97,79
7	0,00	126,39
1	0,00	0,00
2	-12,48	15,26

2P = 1 888,2688 m^2
P = 944,13 m^2

$\overline{MM'} = v = \dfrac{1888{,}2688}{126{,}39}$ = 14,94 m $\overline{7M'} = \dfrac{14{,}94 \cdot 16{,}75}{32{,}62}$ = 7,67 m

$\overline{7M} = \dfrac{14{,}94 \cdot 36{,}70}{32{,}62}$ = 16,81 m   pro kontrolu $\overline{7M} = \sqrt{14{,}94^2 + 7{,}67^2}$ = 16,79 m

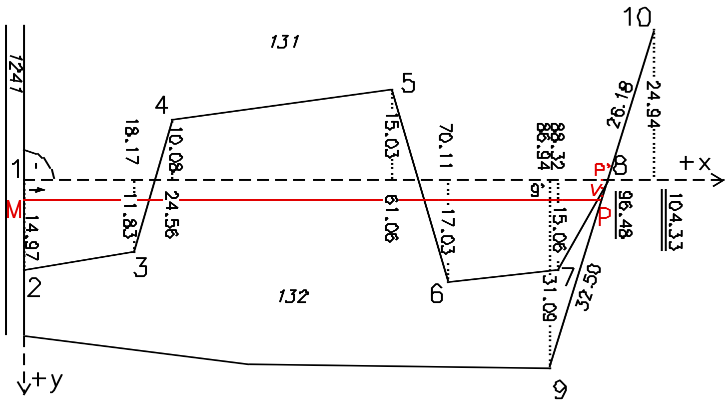
$\overline{1M'} = \overline{17} + \overline{7M'}$ = 126,39 + 7,67 = 134,06 m $\overline{1M} = \sqrt{134{,}06^2 + 14{,}94^2}$ = 134,89 m

$2P_{\Delta 1M7}$ = $126{,}39 \cdot 14{,}94$ = 1888,2666 m^2 $P_{\Delta 1M7}$ = 944,13 m^2

1.2.2. vyrovnání hranice daným směrem

Lomenou hranici zaměříme na vhodně zvolenou měřickou přímku, která má požadovaný směr nového rozdělení a prochází přibližně místem nového rozdělení. Postup výpočtu si opět vysvětlíme na příkladu.

Příklad 1.9: Vypočtěte vytyčovací prvky pro vytyčení přímé hranice mezi pozemky *131* a *132*, která má být kolmá k cestě p.č. *1241* (obr.1-23).



obr.1-23

Postup výpočtu:

1) vypočteme L'Huillierovými vzorci výměru mnohoúhelníka určeného vrcholy 1 až 8
2) při kladném výsledku je větší plocha po levé straně měřické přímky, proto nová dělicí hranice bude na přímce *810*; při záporném výsledku je větší plocha po pravé straně měřické přímky, proto nová dělicí hranice bude na přímce *89*; při nulovém výsledku je měřická přímka novou dělicí hranicí
3) výměra mnohoúhelníka je stejná, jako výměra lichoběžníka □18PM
4) lichoběžník nahradíme obdélníkem o základně $\overline{18}$
5) vypočteme výšku *v'*, délku hranice $\overline{MP}$ a z výměry a základen vypočteme výšku *v*.
6) pokud jsou *v'* a *v* rozdílné – vypočteme znovu $\overline{MP}$ a novou výšku *v*.
7) pokud se výšky v požadované přesnosti neliší, vypočteme vytyčovací prvky pro bod P (tj. kolmici $v = \overline{PP'}$, staničení $\overline{1P'}$, délku nové hranice $\overline{MP}$, délku $\overline{8P}$, případně $\overline{9P}$ po původní hranici (pro výpočet využíváme podobnost trojúhelníků)
8) stejným způsobem postupujeme i u bodu M, v našem příkladu je pata kolmice M' totožná s bodem 1
9) kontrolně vypočteme výměru lichoběžníka □18PM
10) pokud známe všechny lomové body parcel, vypočteme kontrolně výměry parcel – původní i nové

1. výpočet:

$P_{\square 18PM} = \overline{18} \cdot v'$; $\overline{MM'} = \overline{PP'} = v' = \dfrac{P}{\overline{\overline{18}}}$; $\overline{8P'} = \dfrac{\overline{PP'} \cdot \overline{89'}}{\overline{\overline{99'}}}$; $\overline{MP} = \overline{18} - \overline{8P'}$;

$2P_{\square 18PM} = \left(\overline{18} + \overline{MP}\right) \cdot v$; $\overline{MM'} = \overline{PP'} = v = \dfrac{2P}{\left(\overline{18} + \overline{MP}\right)}$;

následuje 2. výpočet:

$\overline{8P'} = \dfrac{\overline{PP'} \cdot \overline{89'}}{\overline{\overline{99'}}}$; $\overline{8P} = \dfrac{\overline{PP'} \cdot \overline{89}}{\overline{\overline{99'}}}$; pro kontrolu $\overline{8P} = \sqrt{\overline{PP'}^2 + \overline{8P'}^2}$; $\overline{MP} = \overline{18} - \overline{8P'}$;

$2P_{\square 18PM} = \left(\overline{18} + \overline{MP}\right) \cdot \overline{PP'}$

Číselný výpočet:

Bod	y	x
1	0,00	0,00
2	14,97	0,00
3	11,83	18,17
4	-10,08	24,56
5	-15,03	61,06
6	17,03	70,11
7	15,06	88,32
8	0,00	96,48
1	0,00	0,00
2	14,97	0,00

$2P = -306{,}972 \text{ m}^2$
$P = -153{,}486 \text{ m}^2$

1. výpočet:

$\overline{MM'} = \overline{PP'} = v' = \dfrac{153{,}486}{96{,}48} = 1{,}59$ m; $\overline{8P'} = \dfrac{1{,}59 \cdot 9{,}54}{31{,}09} = 0{,}49$ m;

$\overline{MP} = 96{,}48 - 0{,}49 = 95{,}99$ m

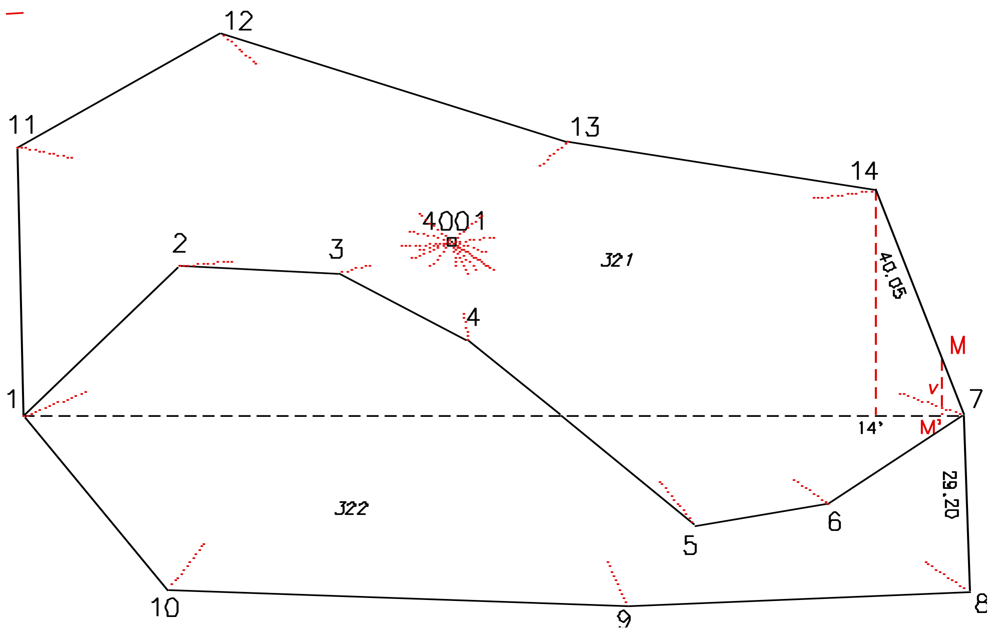
2. výpočet:

$\overline{MM'} = \overline{PP'} = v = \dfrac{306{,}972}{\left(96{,}48 + 95{,}99\right)} = 1{,}59$ m

$\overline{8P'} = \dfrac{1{,}59 \cdot 9{,}54}{31{,}09} = 0{,}49$ m; $\overline{8P} = \dfrac{1{,}59 \cdot 32{,}50}{31{,}09} = 1{,}66$ m; $\overline{MP} = 96{,}48 - 0{,}49 = 95{,}99$ m;

$2P_{\square 18PM} = \left(96{,}48 + 95{,}99\right) \cdot 1{,}59 = 306{,}0273 \text{ m}^2$ $P_{\square 18PM} = 153{,}01 \text{ m}^2$

Příklad 1.10: Vypočtěte vytyčovací prvky nové přímé hranice mezi pozemky *321* a *322*. Hranice byly zaměřeny ze stanoviska 4001 polární metodou s orientací na bod 1 (úhly v míře setinné). Lomenou hranici 1 až 7 nahraďte hranicí přímou, která vychází z bodu 1 (obr.1-24).



obr.1-24

Typ úlohy	Číslo bodu			y staničení vzdálenost	x kolmice vodorovný úhel	Pozn. Výškový úhel
1			4001			
			1	76,32	0,00	
			2	45,04	19,024	
			3	19,23	6,045	
			4	16,73	313,663	
			5	62,18	279,400	
			6	76,08	263,561	
			7	89,49	245,668	
			8	103,74	262,596	
			9	66,97	296,038	
			10	74,17	368,200	
			11	73,38	38,155	
			12	51,24	71,340	
			13	25,37	180,124	
			14	70,73	217,148	

Postup výpočtu:

1) zvolíme souřadnice stanoviska 4001 (1000,00; 5000,00)
2) osu y vložíme do směru 4001-1 a vypočteme souřadnice bodů 1 až 14
3) vypočteme L'Huillierovými vzorci výměru mnohoúhelníka 1 až 7
4) plocha je kladná, nová hranice bude na přímce *714*
5) z bodu 1 vypočteme polární prvky (délku, směrník) pro body 7, 14
6) vypočteme ortogonální vytyčovací prvky pro body 7, 14 od přímky *17* převodem polárních souřadnic na pravoúhlé
7) vypočteme výšku trojúhelníka Δ17M
8) podobností trojúhelníků vypočteme vytyčovací prvky pro bod M
9) vypočteme souřadnice bodu M
10) vypočteme výměry pozemků *321* a *322* – původní i nové

Číselný výpočet:

Bod	vzdálenost (m)	vod.směr (g)	směrník (g)	y	x
4001				1000,00	5000,00
1	76,32	0,00	100,000	1076,32	5000,00
2	45,04	19,024	119,024	1043,04	4986,74
3	19,23	6,045	106,045	1019,14	4998,18
4	16,73	313,663	13,663	1003,56	5016,35
5	62,18	279,400	379,400	980,23	5058,95
6	76,08	263,561	363,561	958,79	5063,95
7	89,49	245,668	345,668	932,56	5058,83
8	103,74	262,596	362,596	942,50	5086,34
9	66,97	296,038	396,038	995,83	5066,84
10	74,17	368,200	68,200	1065,11	5035,53
11	73,38	38,155	138,155	1060,59	4958,61
12	51,24	71,340	171,340	1022,30	4953,87
13	25,37	180,124	280,124	975,86	4992,21
14	70,73	217,148	317,148	931,82	5018,82

Souřadnice redukujeme a vypočteme výměru mnohoúhelníka 1 až 7.

Bod	y	x
1	176,32	100,00
2	143,04	86,74
3	119,14	98,18
4	103,56	116,35
5	80,23	158,95
6	58,79	163,95
7	32,56	158,83
1	176,32	100,00
2	143,04	86,74

$$2P = 1420{,}4838\ m^2$$
$$P = 710{,}2419\ m^2$$

Výpočet ortogonálních vytyčovacích prvků pro bod 14

Bod	y	x	s (m)	σ (g)	staničení	kolmice
1	1076,32	5000,00			0,00	0,00
7	932,56	5058,83	155,33	324,728	155,33	0,00
14	931,82	5018,82	145,72	308,245	140,86	-37,31

$\overline{MM'} = v = \dfrac{1420{,}4838}{155{,}33} = 9{,}14\ \text{m}$ $\overline{7M'} = \dfrac{9{,}14 \cdot 14{,}47}{37{,}31} = 3{,}54\ \text{m}$

$\overline{7M} = \dfrac{9{,}14 \cdot 40{,}05}{37{,}31} = 9{,}81\ \text{m}$ pro kontrolu $\overline{7M} = \sqrt{9{,}14^2 + 3{,}54^2} = 9{,}80\ \text{m}$

$\overline{1M'} = \overline{17} - \overline{7M'} = 155{,}33 - 3{,}54 = 151{,}79\ \text{m}$ $\overline{1M} = \sqrt{151{,}79^2 + 9{,}14^2} = 152{,}06\ \text{m}$

Vypočteme souřadnice bodu M

Bod	y	x	s (m)	σ (g)	y	x
7	932,56	5058,83				
14	931,82	5018,82	40,02	201,177		
M			9,80	201,177	932,38	5049,03

parcela *321*

Bod	y	x
1	176,32	100,00
11	160,59	58,61
12	122,30	53,87
13	75,86	92,21
14	31,82	118,82
7	32,56	158,83
6	58,79	163,95
5	80,23	158,95
4	103,56	116,35
3	119,14	98,18
2	143,04	86,74
1	176,32	100,00
11	160,59	58,61

2P = 13114,8672 m^2
P = 6557,43 m^2

parcela *322*

Bod	y	x
1	176,32	100,00
2	143,04	86,74
3	119,14	98,18
4	103,56	116,35
5	80,23	158,95
6	58,79	163,95
7	32,56	158,83
8	42,50	186,34
9	95,83	166,84
10	165,11	135,53
1	176,32	100,00
2	143,04	86,74

2P = 10065,6472 m^2
P = 5032,82 m^2

Bod	y	x
1	176,32	100,00
11	160,59	58,61
12	122,30	53,87
13	75,86	92,21
14	31,82	118,82
M	32,38	149,03
1	176,32	100,00
11	160,59	58,61

$2P = 13115{,}8632\ m^2$
$P = 6557{,}93\ m^2$

Bod	y	x
1	176,32	100,00
M	32,38	149,03
7	32,56	158,83
8	42,50	186,34
9	95,83	166,84
10	165,11	135,53
1	176,32	100,00
M	32,38	149,03

$2P = 10064{,}6008\ m^2$
$P = 5032{,}30\ m^2$

Rozdíl ve výměře parcel je způsoben zaokrouhlením vytyčovacích prvků na cm.

1.3. Dělení pozemků

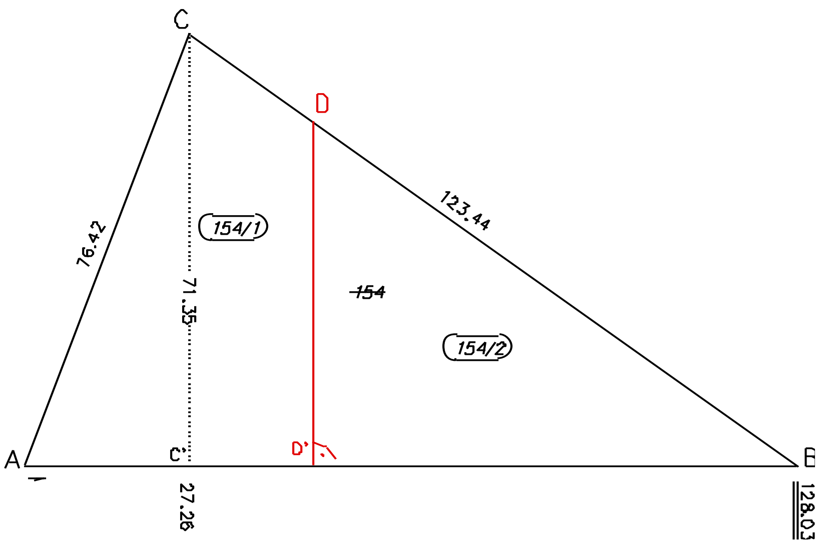
Velmi častou úlohou je při úpravách a majetkových převodech pozemků rozdělení tak, aby dělení vyhovovalo předem zadaným podmínkám (oddělovaná část má danou výměru, dělicí hranice má určitou polohu).

V terénu je potřeba nejprve celý pozemek zaměřit, vypočítat výměru a tu porovnat s výměrou uvedenou v katastru nemovitostí. Rozdíl $O_P = P_{KN} - P_V$ nesmí překročit mezní odchylku u_{MP} pro dvojí určení výměr (např. $u_{MP} = 0{,}25 \cdot \sqrt{P} + 2$). Mezní odchylka je stanovena podle měřítka a typu mapových podkladů v zájmovém prostoru a způsobu určení výměr.

V současné době jsou v katastru nemovitostí uvedeny výměry s kódem kvality 0, 1, 2 (0 – grafický způsob, 1 – z přímo měřených měr, 2 – ze souřadnic). Mapové podklady mohou být analogové, digitalizované nebo digitální. Podle typu podkladu porovnáváme výměru z KN s výměrou vypočtenou. Mezní odchylky pro dvojí určení ploch jsou uvedeny v příloze 14 vyhlášky 26/2007 Sb.

U oddělovaných částí uvádíme do KN výměru z vypočtených hodnot. Vytyčovací prvky nové hranice počítáme vždy z výměr vypočtených z měření.

Příklad 1.11: Rozdělte pozemek *154* na 2 stejné části tak, aby nová dělicí hranice byla kolmá na stranu *AB*. Výměra uvedená v KN je 4570 m^2, kvalita 0, analogová mapa v měřítku 1:1000.



obr.1-25

Postup výpočtu:

1) vypočteme výměru Δ ABC, porovnáme s výměrou z KN.
2) kontrolně vypočteme oměrné
3) vypočteme výměru Δ ACC' a Δ BCC'
4) z podobnosti Δ BDD' a Δ BCC' vypočteme $\overline{DD'}$; $\overline{BD'}$; $\overline{BD}$
5) kontrolně vypočteme výměry *154/1* a *154/2*.

Číselný výpočet:

$2P_{\Delta ABC} = \overline{AB} \cdot \overline{CC'} = 128{,}03 \cdot 71{,}35 = 9134{,}9405\ m^2$

$P = 4567{,}47\ m^2$

$O_P = 4570\ m^2 - 4567\ m^2 = 3\ m^2$ $\quad u_{MP} = 0{,}25 \cdot \sqrt{4570} + 2 = 19\ m^2$ $\quad O_P < u_{MP}$

kontrolně vypočteme oměrné $\quad \overline{AC} = \sqrt{27{,}26^2 + 71{,}35^2} = 76{,}38$ m; Os = -0,04 m

$\overline{BC} = \sqrt{100{,}77^2 + 71{,}35^2} = 123{,}48$ m; Os = 0,04 m

$2P_{\Delta ABC'} = \overline{AC'} \cdot \overline{CC'} = 27{,}26 \cdot 71{,}35 = 1945{,}001\ m^2$

$P = 972{,}50\ m^2$

$2P_{\Delta BCC'} = \overline{C'B} \cdot \overline{CC'} = 100{,}77 \cdot 71{,}35 = 7189{,}9395\ m^2$

$P = 3594{,}97\ m^2$

oddělovaná část $= \frac{1}{2} P_{154} = 2283{,}74\ m^2$ (*154/1, 154/2)*

$$\frac{\overline{DD'}^2}{\overline{CC'}^2} = \frac{\frac{1}{2}P_{154}}{P_{\Delta BCC'}}; \quad \overline{DD'}^2 = \frac{\frac{1}{2}P_{154}}{P_{\Delta BCC'}} \cdot \overline{CC'}^2; \quad \overline{DD'} = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}P_{154}}{P_{\Delta BCC'}}} \cdot \overline{CC'}; \quad \overline{DD'} = 56{,}87\ m$$

$$\frac{\overline{BD'}^2}{\overline{BC'}^2} = \frac{\frac{1}{2}P_{154}}{P_{\Delta BCC'}}; \quad \overline{BD'}^2 = \frac{\frac{1}{2}P_{154}}{P_{\Delta BCC'}} \cdot \overline{BC'}^2; \quad \overline{BD'} = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}P_{154}}{P_{\Delta BCC'}}} \cdot \overline{BC'}; \quad \overline{BD'} = 80{,}32\ m$$

$$\frac{\overline{BD}^2}{\overline{BC}^2} = \frac{\frac{1}{2}P_{154}}{P_{\Delta BCC'}}; \quad \overline{BD}^2 = \frac{\frac{1}{2}P_{154}}{P_{\Delta BCC'}} \cdot \overline{BC}^2; \quad \overline{BD} = \sqrt{\frac{\frac{1}{2}P_{154}}{P_{\Delta BCC'}}} \cdot \overline{BC}; \quad \overline{BC} = 98{,}39\ m$$

kontrolně $\overline{BD} = \sqrt{\overline{BD'}^2 + \overline{DD'}^2}$; $\overline{BD} = \sqrt{80{,}32^2 + 56{,}87^2} = 98{,}41$ m

vytyčovací prvky, tj. souřadnice y,x v místní soustavě (x_přímka *AB*): D (-56,87;47,71)

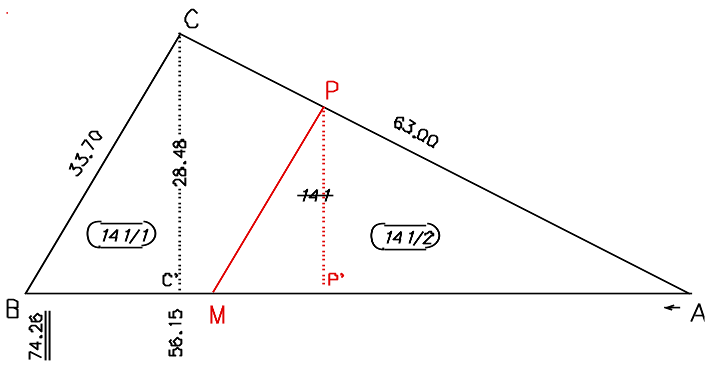
kontrolní výpočet výměr :

154/1 $\quad P = P_{\Delta ACC'} + P_{\square CDD'C'} = 972{,}50\ m^2 + 1311{,}05\ m^2 = 2283{,}55\ m^2$

154/2 $\quad P = P_{\Delta BDD'} = 2283{,}90\ m^2$

Do katastru nemovitostí zapíšeme výměry na celé m^2, tj. 2284 m^2, $P_{KN} = 4570\ m^2$,
P (*154/*1+*154/*2) = 4568 m^2, rozdíl 2 m^2 nerozdělujeme, protože nové určení výměr je přesnější než určení původní.

Příklad 1.12: Rozdělte pozemek *141* na 2 stejné části tak, aby nová dělicí hranice byla rovnoběžná se stranou *BC*. Výměra uvedená v KN je 1055 m^2, kvalita 0, analogová mapa v měřítku 1:1000.



obr.1-26

Postup výpočtu:

1) vypočteme výměru Δ ABC, porovnáme s výměrou z KN
2) kontrolně vypočteme oměrné
3) vypočteme výměru oddělované části, tj. $\frac{1}{2} P_{141}$
4) z podobnosti trojúhelníků platí, že poměr ploch je stejný jako poměr čtverců stran, např. $\frac{P_V}{p_V} = \frac{\overline{AB}^2}{\overline{AM}^2}$
5) vypočteme vzdálenosti $\overline{AM}, \overline{AP}, \overline{MP}, \overline{PP'}, \overline{AP'}$; pro výpočet použijeme měřené hodnoty
6) kontrolně vypočteme výměru *141/2*

Číselný výpočet:

$2P_{\Delta ABC} = \overline{AB} \cdot \overline{CC'} = 74{,}26 \cdot 28{,}48 = 2114{,}9248\ m^2$

$P_V = 1057{,}4624\ m^2$

$O_P = 1055\ m^2 - 1057\ m^2 = -2\ m^2$ $\quad u_{MP} = 0{,}25 \cdot \sqrt{1057} + 2 = 10\ m^2$ $\quad O_P < u_{MP}$

kontrolně vypočteme oměrné $\quad \overline{AC} = \sqrt{56{,}15^2 + 28{,}48^2} = 62{,}96$ m; Os = -0,04 m

$\overline{BC} = \sqrt{18{,}11^2 + 28{,}48^2} = 33{,}75$ m; Os = 0,05 m

$p_V = \frac{P_V}{2} = 528{,}7312\ m^2$

$$\frac{\overline{AM}^2}{\overline{AB}^2} = \frac{p_V}{P_V}; \qquad \overline{AM} = 52{,}51 \text{ m} \qquad \frac{\overline{AP}^2}{\overline{AC}^2} = \frac{p_V}{P_V}; \qquad \overline{AP} = 44{,}55 \text{ m}$$

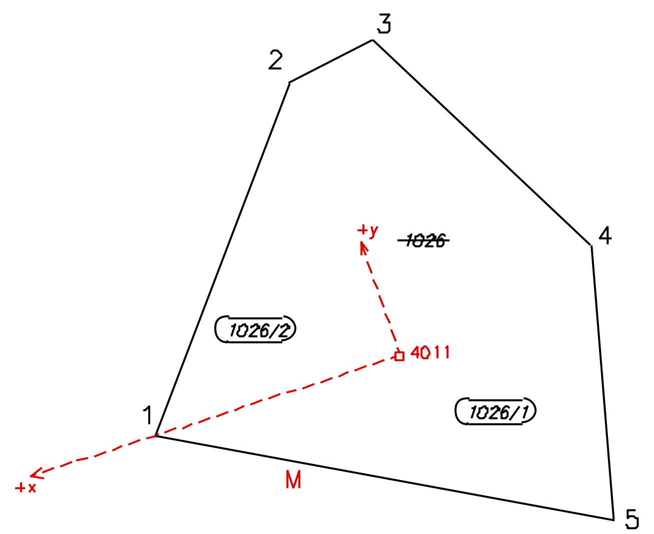
$$\frac{\overline{MP}^2}{\overline{BC}^2} = \frac{p_V}{P_V}; \qquad \overline{MP} = 23{,}83 \text{ m} \qquad \frac{\overline{PP'}^2}{\overline{CC'}^2} = \frac{p_V}{P_V}; \qquad \overline{PP'} = 20{,}14 \text{ m}$$

$$\frac{\overline{AP'}}{\overline{AC'}} = \frac{\overline{PP'}}{\overline{CC'}}; \qquad \overline{AP'} = 39{,}71 \text{ m}$$

$$P_{141/2} = \frac{52{,}51 \cdot 20{,}14}{2} = 528{,}776 \text{ m}^2$$

Příklad 1.13: Rozdělte pozemek *1026* na 2 části tak, aby nová dělicí hranice byla kolmá na stranu *15* a vycházela z bodu 3. Výměra uvedená v KN je 2270 m^2, kvalita 0, analogová mapa v měřítku 1:1000. Lomové body byly zaměřeny polární metodou ze stanoviska 4011 s orientací na bod 1, směry v míře setinné.

Typ úlohy	Číslo bodu			y staničení vzdálenost	x kolmice vodorovný úhel	Pozn. Výškový úhel
1			4011			
			1	32,16	0,00	
			2	38,94	96,14	
			3	42,38	114,91	
			4	26,76	186,67	
			5	34,82	261,39	



obr.1-27

Postup výpočtu:

1) zvolíme souřadnice stanoviska 4011 (1000,00; 5000,00)
2) osu x vložíme do směru 4011-1 a vypočteme souřadnice bodů 1 až 5
3) vypočteme L'Huillierovými vzorci výměru mnohoúhelníka 1 až 5
4) z bodu 1 vypočteme polární prvky (délku, směrník) pro bod 5
5) vypočteme ortogonální vytyčovací prvky pro bod M na přímce *15* s využitím rovnic pro bod na kolmici
6) vypočteme souřadnice bodu M
7) vypočteme polární vytyčovací prvky pro bod M ze stanoviska 4011
8) vypočteme výměry pozemků *1026/1* a *1026/2*

Číselný výpočet:

Bod	vzdálenost (m)	vod.směr (g)	směrník (g)	y	x
4011				1000,00	5000,00
1	32,16	0,00	0,00	1000,00	5032,16
2	38,94	96,14	96,14	1038,87	5002,36
3	42,38	114,91	114,91	1041,22	4990,16
4	26,76	186,67	186,67	1005,56	4973,82
5	34,82	261,39	261,39	971,39	4980,15

Souřadnice redukujeme a vypočteme výměru mnohoúhelníka 1 až 5.

Bod	y	x
1	100,00	132,16
2	138,87	102,36
3	141,22	90,16
4	105,56	73,82
5	71,39	80,15
1	100,00	132,16
2	138,87	102,36

$2P = 4533{,}7218\ m^2$
$P = 2266{,}8609\ m^2$

Výpočet polárních prvků pro bod 5

Bod	y	x	s (m)	σ (g)
1	1000,00	5032,16		
5	971,39	4980,15	59,36	232,0162

Výpočet ortogonálních prvků (staničení, kolmice) pro bod M

$y_3 = y_1 + s_{1M} \cdot \sin\sigma_{15} + k_{M3} \cdot \cos\sigma_{15}$ $\qquad$ $x_3 = x_1 + s_{1M} \cdot \cos\sigma_{15} - k_{M3} \cdot \sin\sigma_{15}$

dosadíme a nahradíme $\sin\sigma_{15} = k_y$; $\cos\sigma_{15} = k_x$

$$41{,}22 = s_{1M} \cdot k_y + k_{M3} \cdot k_x$$
$$-42{,}00 = s_{1M} \cdot k_x - k_{M3} \cdot k_y$$

vyřešením soustavy rovnic dostáváme s_{1M} = 16,93 m; k_{M3} = -56,36 m
Bod M leží na přímce *15,* kolmice je 0.

Bod	y	x	s (m)	σ (g)	staničení	kolmice
1	1000,00	5032,16			0,00	0,00
5	971,39	4980,15	59,36	232,0162	59,36	0,00
M			16,93	232,0162	16,93	0,00

Vypočteme souřadnice bodu M a polární vytyčovací prvky z bodu 4011

Bod	y	x	s (m)	σ (g)	y	x
1	1000,00	5032,16				
5	971,39	4980,15	59,36	232,0162		
M			16,93	232,0162	991,84	5017,33

Bod	y	x	s (m)	σ (g)	ω (g)
4011	1000,00	5000,00			
1	1000,00	5032,16	32,16	0,0000	0,0000
M	991,84	5017,33	19,16	371,9846	371,9846

parcela *1026/1*

Bod	y	x
3	141,22	90,16
4	105,56	73,82
5	71,39	80,15
M	91,84	117,33
3	141,22	90,16
4	105,56	73,82

2P = 3175,6405 m^2
P = 1587,82 m^2

parcela *1026/2*

Bod	y	x
1	100,00	132,16
2	138,87	102,36
3	141,22	90,16
M	91,84	117,33
1	100,00	132,16
2	138,87	102,36

2P = 1358,1966 m^2
P = 679,10 m^2

kontrola P (*1026/1+1026/2*) = 2267 m^2, rozdíl 0 m^2

2. Trigonometrické určování výšek

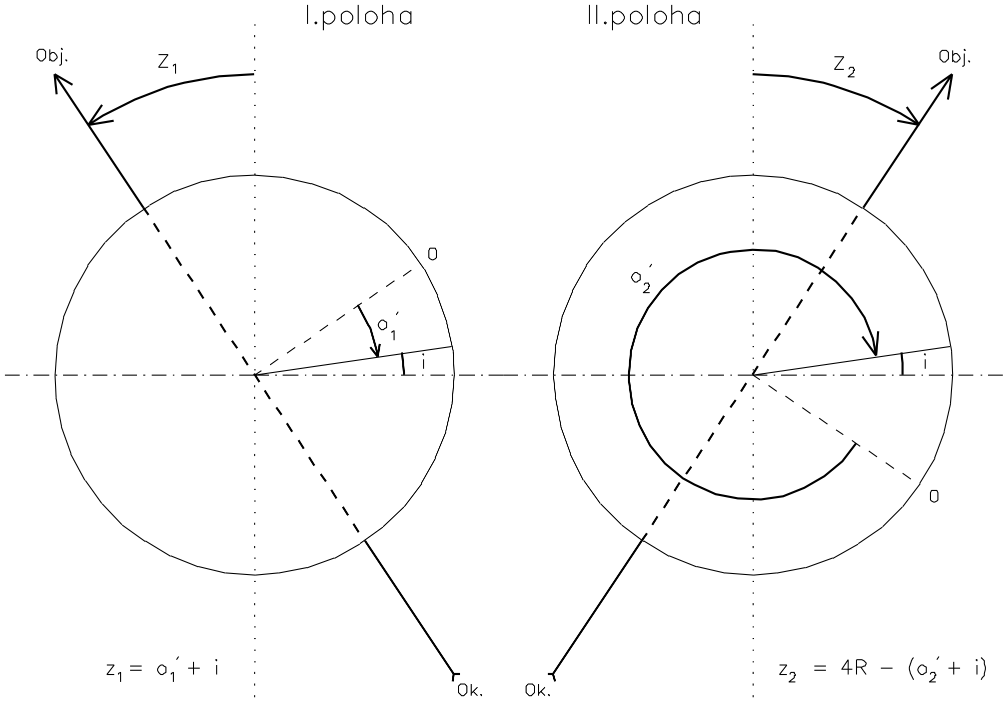
Výškové rozdíly určujeme nivelací nebo trigonometrickým způsobem. Trigonometrický způsob využijeme, pokud nivelace není vhodná a postačí nám nižší přesnost.

Při trigonometrickém způsobu vycházíme z naměřené vzdálenosti (vodorovné nebo šikmé) a svislého úhlu (zenitové vzdálenosti nebo výškového úhlu).

Trigonometrické určování výšek užíváme pro

1) určení výšky předmětu
2) určení nadmořské výšky bodu

2.1. Odvození zenitové vzdálenosti



obr.2-1

o'_1, o'_2 …. měřená hodnota v I. a II. poloze dalekohledu

z_1, z_2 …. zenitová vzdálenost v I. a II. poloze dalekohledu

i …. indexová chyba

$$z = \frac{z_1 + z_2}{2} = \frac{o'_1 + i + 4R - o'_2 - i}{2} = \frac{4R + o'_1 - o'_2}{2} \qquad [2.1]$$

Oprava indexové chyby

$z_1 = z_2$ $\qquad o'_1 + i = 4R - o'_2 - i$

$$2i = 4R - o'_2 - o'_1$$

$$2i = 4R - (o'_1 + o'_2)$$

$$i = \frac{4R - (o'_1 + o'_2)}{2} \quad \text{nebo} \quad i = 2R - \frac{o'_1 + o'_2}{2} \qquad [2.2]$$

pro i = 0 platí: $\qquad o'_1 + o'_2 = 4R \qquad [2.3]$

$o'_1 + o'_2 \geq 4R$ i ..odečíst od o'_1

$o'_1 + o'_2 \leq 4R$ i ..přičíst k o'_1

Příklad 2.1: Vypočtěte indexovou chybu a zenitovou vzdálenost z měření v obou polohách dalekohledu.

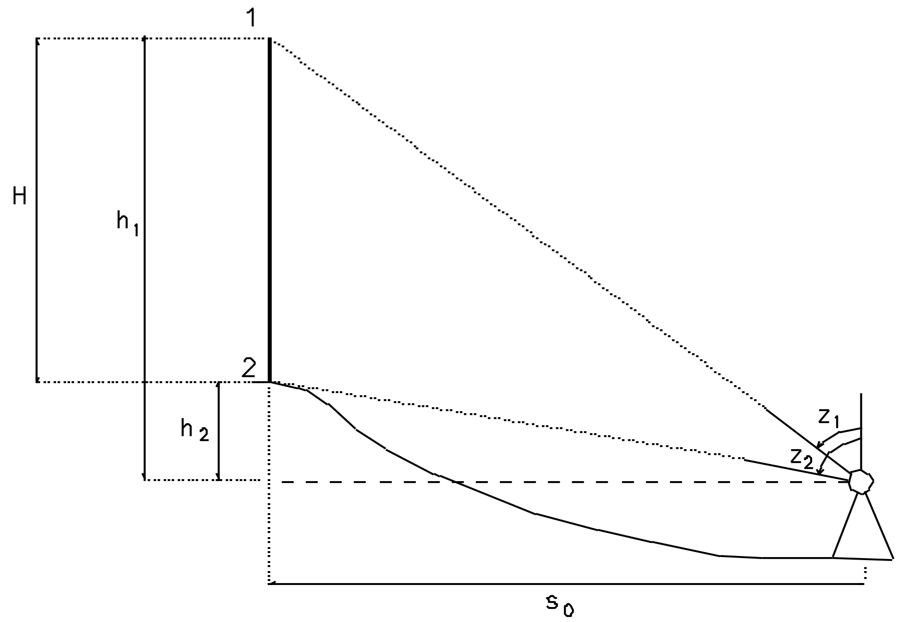
$o'_1 = 99{,}2960^g$	$o'_1 = 97{,}1419^g$
$o'_2 = 300{,}7120^g$	$o'_2 = 302{,}8541^g$
$o'_1 + o'_2 = 400{,}0080^g$	$o'_1 + o'_2 = 399{,}9960^g$
$2i = -0{,}0080^g$	$2i = +0{,}0040^g$
$i = -0{,}0040^g$	$i = +0{,}0020^g$
$z = 99{,}2920^g$	$z = 97{,}1439^g$

2.2. Určení výšky předmětu

Určení výšky předmětu rozdělujeme na

1) **předmět s patou přístupnou** – lze přímo měřit vzdálenost a úhel na vrchol i patu předmětu, např. stožár
2) **předmět s patou nepřístupnou** – nelze přímo určit vzdálenost ani úhel k patě předmětu, např. kostelní věže a podle prostoru potom řešíme
    1) pomocí trojúhelníka – při dostatku místa v okolí
    2) v přímce – při nedostatku místa

2.2.1. předmět s patou přístupnou



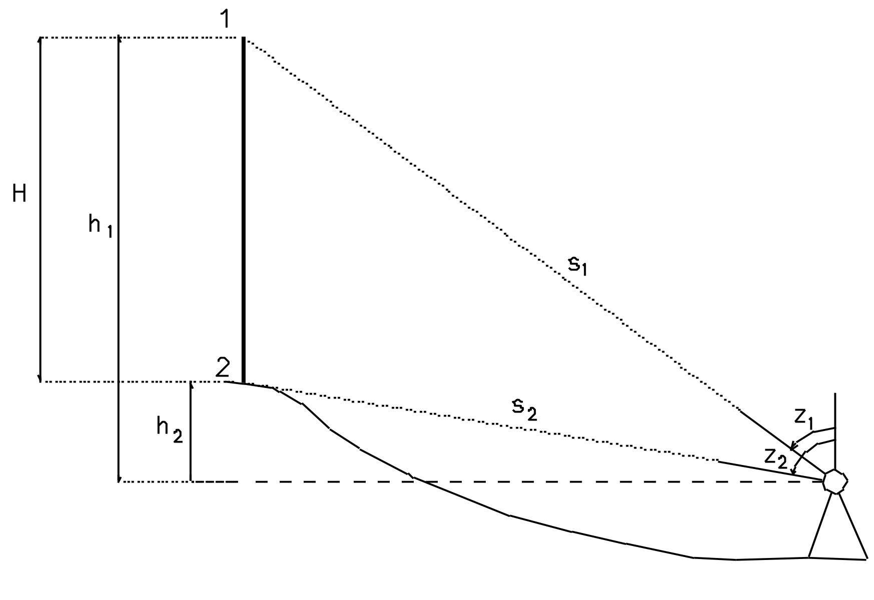
obr.2-2

$$h_1 = s_0 \cdot \cot g\, z_1 \qquad h_2 = s_0 \cdot \cot g\, z_2 \qquad [2.4]$$

$$H = s_0 \cdot (\cot g\, z_1 - \cot g\, z_2) \qquad [2.5]$$

s_0 ….vodorovná vzdálenost od stanoviska k předmětu
z_1 ….zenitová vzdálenost (úhel) na vrchol předmětu
z_2 ….zenitová vzdálenost (úhel) na patu předmětu

Za předpokladu, že měříme šikmou vzdálenost, lze využít vzorce



obr.2-3

$$\mathrm{h}_1 = s_1 \cdot \cos z_1 \qquad\qquad \mathrm{h}_2 = s_2 \cdot \cos z_2 \qquad [2.6]$$

$$\mathrm{H} = s_1 \cdot \cos z_1 - s_2 \cdot \cos z_2 \qquad [2.7]$$

s_i ….šikmá vzdálenost od stanoviska k předmětu

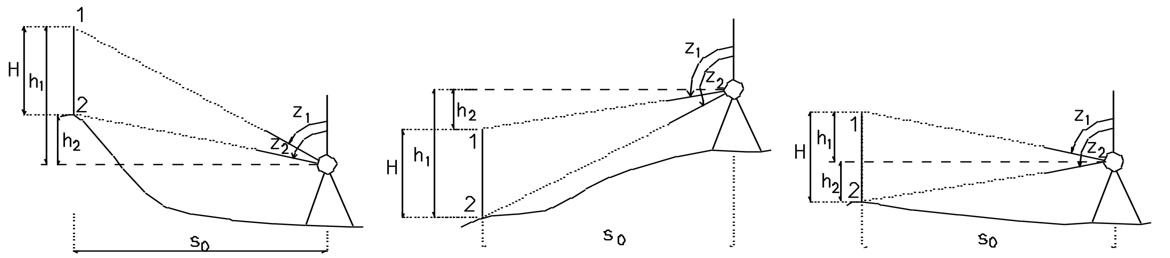
Vzhledem k tomu, že $z = \langle 0;2\mathrm{R}\rangle$ vzorce platí pro všechny případy (body nad horizontem, pod horizontem).

Příklad 2.2: Vypočtěte výšku předmětu pro vzdálenost s_0 = 100 m a zenitové vzdálenosti

a) z_1 = 70,00^g $\quad z_2$ = 90,00^g

b) z_1 = 110,00^g $\quad z_2$ = 130,00^g

c) z_1 = 90,00^g $\quad z_2$ = 110,00^g



obr.2-4 a, b, c

Číselný výpočet:

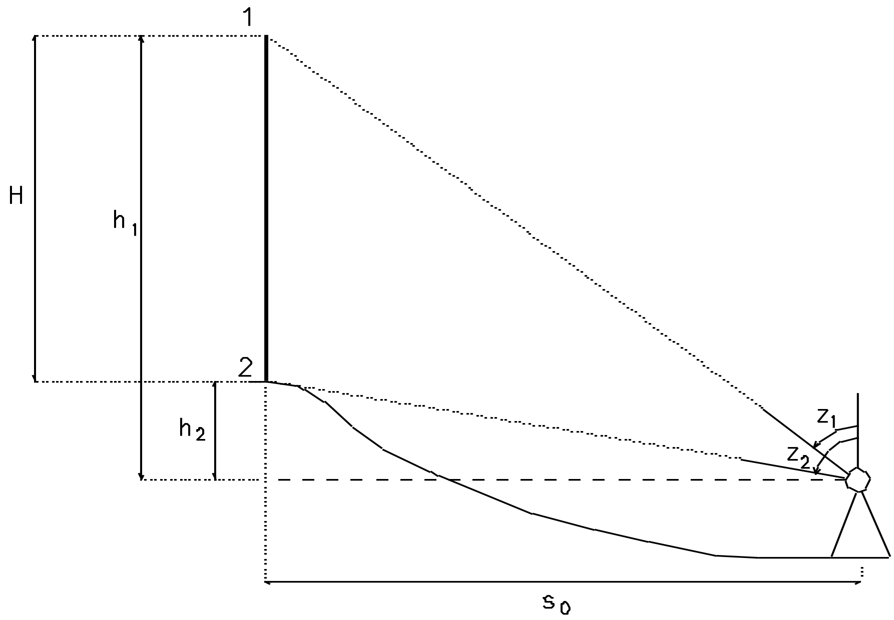
a) $\mathrm{H} = s_0 \cdot \left(\cot g\, 70^g - \cot g\, 90^g\right) = 100 \cdot (0{,}509525 - 0{,}158384) = 35{,}11$ m

b) $\mathrm{H} = s_0 \cdot \left(\cot g\, 110^g - \cot g\, 130^g\right) = 100 \cdot (-0{,}158384 + 0{,}509525) = 35{,}11$ m

c) $\mathrm{H} = s_0 \cdot \left(\cot g\, 90^g - \cot g\, 110^g\right) = 100 \cdot (0{,}158384 + 0{,}158384) = 31{,}68$ m

Příklad 2.3: Vypočtěte výšku signálu s přístupnou patou.

Zadání	a)	b)	c)
s_0	72,14 m	84,76 m	123,45 m
z_1	74,246^g	82,626^g	101,821^g
z_2	106,732^g	94,548^g	112,867^g



obr.2-5

Číselný výpočet: podle vzorců [2.4] a [2.5]

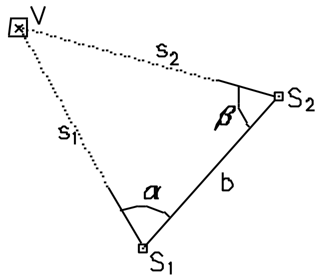
$$\mathrm{H} = s_0 \cdot (\cot g\, z_1 - \cot g\, z_2)$$

Zadání	a)	b)	c)
h_1	30,89 m	23,72 m	- 3,53 m
h_2	- 7,66 m	7,28 m	- 25,30 m
H= h_1 - h_2	38,55 m	16,44 m	21,77 m
H	38,54 m	16,45 m	21,76 m

Rozdíly ve výšce jsou způsobeny postupem výpočtu (zaokrouhlením mezivýsledků h_1, h_2 na cm a přímým výpočtem H podle vzorce [2.5].

2.2.2. předmět s patou nepřístupnou

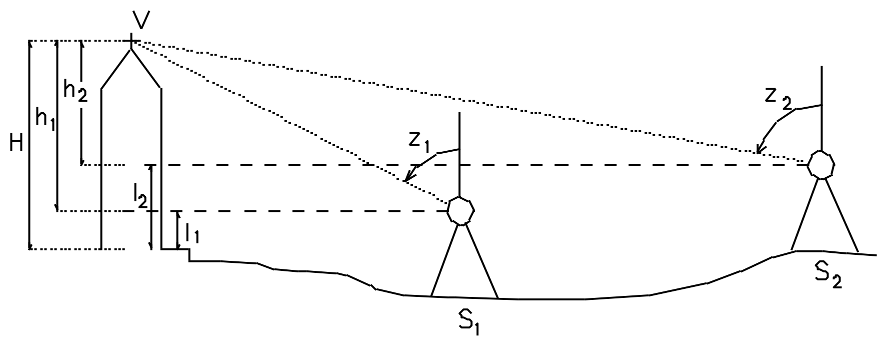
1. zvolíme 2 stanoviska tak, aby s předmětem tvořily trojúhelník (pokud možno rovnostranný nebo rovnoramenný s úhlem na bodě V v intervalu 30-170^g), vzdálenosti spočteme sinovými větami z délky pomocné základny *b* a změřených vodorovných úhlů α, β (obr.2-6).



obr.2-6

$$s_1 = \frac{b \cdot \sin\beta}{\sin(\alpha+\beta)} \qquad s_2 = \frac{b \cdot \sin\alpha}{\sin(\alpha+\beta)} \qquad [2.8]$$

Výšku předmětu vypočteme z převýšení (h_1, h_2) pomocí změřené zenitové vzdálenosti *z* na vrchol předmětu, vzdálenosti *s* a laťového úseku (l_1, l_2) změřeného na lati postavené u paty předmětu při dalekohledu urovnaném do vodorovné polohy.



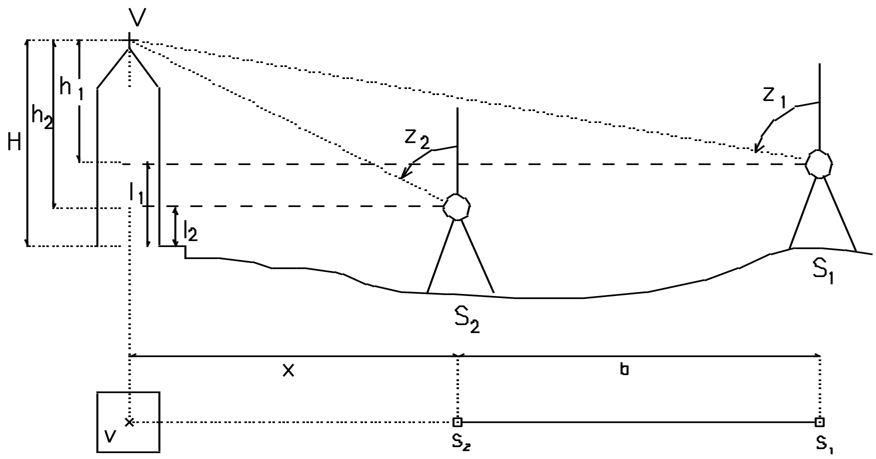
obr.2-7

$$h_1 = s_1 \cdot \cot g\, z_1 \qquad h_2 = s_2 \cdot \cot g\, z_2 \qquad [2.9]$$

$$\mathrm{H} = h_1 + l_1 = h_2 + l_2 \qquad [2.10]$$

Pokud je rozdíl obou vypočtených hodnot menší než mezní odchylka, použijeme do dalších výpočtů průměrnou hodnotu.

2. zvolíme vzdálenější stanovisko (S_1) a druhé stanovisko (S_2) zařadíme do přímky S_1V, změříme základnu b= S_1S_2, zenitové vzdálenosti z_1,z_2 a laťové úseky l_1,l_2.



obr.2-8

$$H = h_1 + l_1 = (b + x) \cdot \operatorname{cotg} z_1 + l_1$$
$$H = h_2 + l_2 = x \cdot \operatorname{cotg} z_2 + l_2 \qquad [2.11]$$

$$(b + x) \cdot \operatorname{cotg} z_1 + l_1 = x \cdot \operatorname{cotg} z_2 + l_2$$
$$x \cdot \operatorname{cotg} z_2 - x \cdot \operatorname{cotg} z_1 = b \cdot \operatorname{cotg} z_1 + l_1 - l_2$$

$$x = \frac{b \cdot \operatorname{cotg} z_1 + l_1 - l_2}{\operatorname{cotg} z_2 - \operatorname{cotg} z_1} \qquad [2.12]$$

Po výpočtu x vypočteme výšku předmětu dosazením do rovnic [2.11], které vznikly úpravou rovnic [2.9], [2.10].

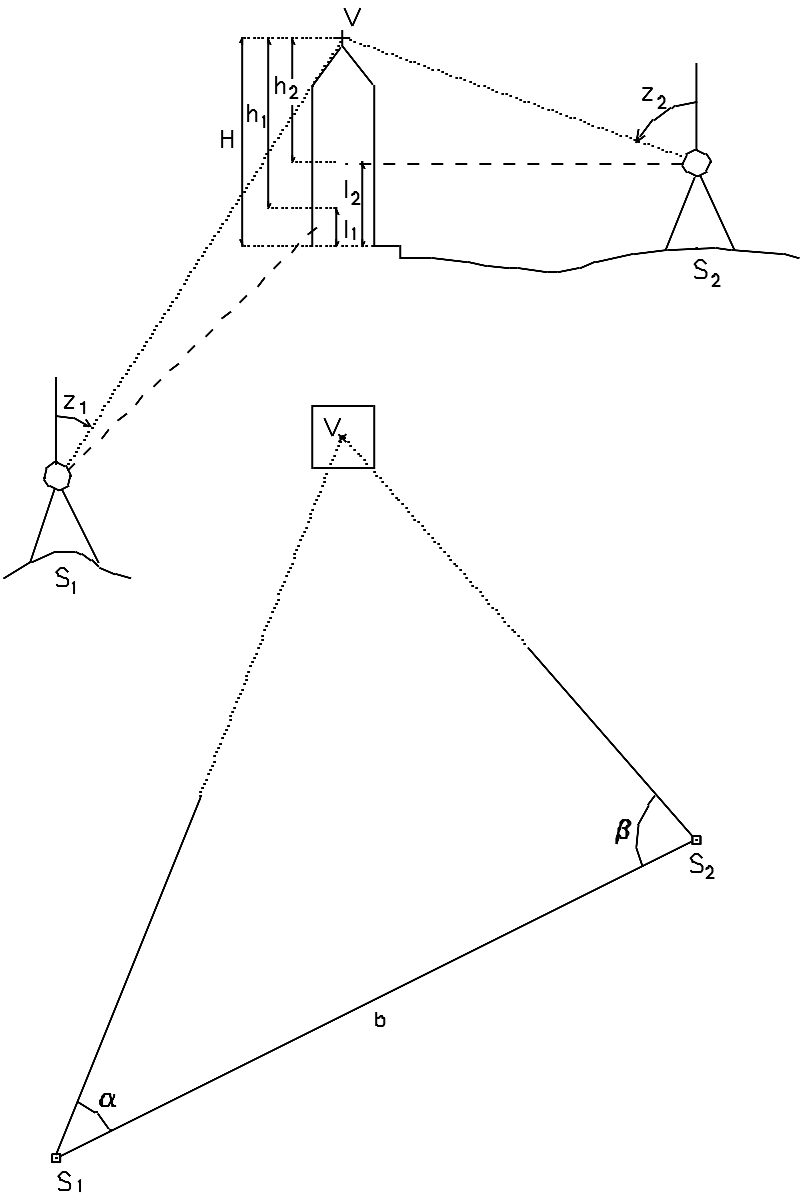
$$h_1 = s_1 \cdot \operatorname{cotg} z_1 \qquad h_2 = s_2 \cdot \operatorname{cotg} z_2$$

$$\mathrm{H} = h_1 + l_1 = h_2 + l_2$$

Příklad 2.4: Vypočtěte výšku věže od prahu při dostatku místa v okolí.

Měřené hodnoty:

stanovisko	S_1	S_2
b	101,26 m	
vod.úhel	62,416^g	74,248^g
z	85,494^g	84,599^g
l	1,13 m	2,14 m



obr.2-9

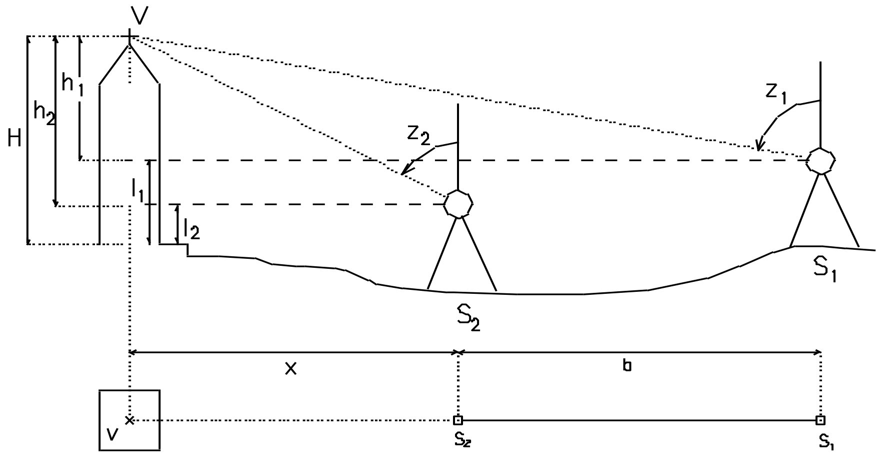
Číselný výpočet:

stanovisko	S_1	S_2
b	101,26 m	
vod.úhel	$62,416^g$	$74,248^g$
s	110,99 m	100,30 m
z	$85,494^g$	$84,599^g$
h	25,74 m	24,75 m
l	1,13 m	2,14 m
H	26,87 m	26,89 m
H	26,88 m	

Příklad 2.5: Vypočtěte výšku věže od prahu při nedostatku místa v okolí.

Měřené hodnoty:

stanovisko	S_1	S_2
b	74,87 m	
z	$81{,}487^g$	$64{,}817^g$
l	1,86 m	0,94 m



obr.2-10

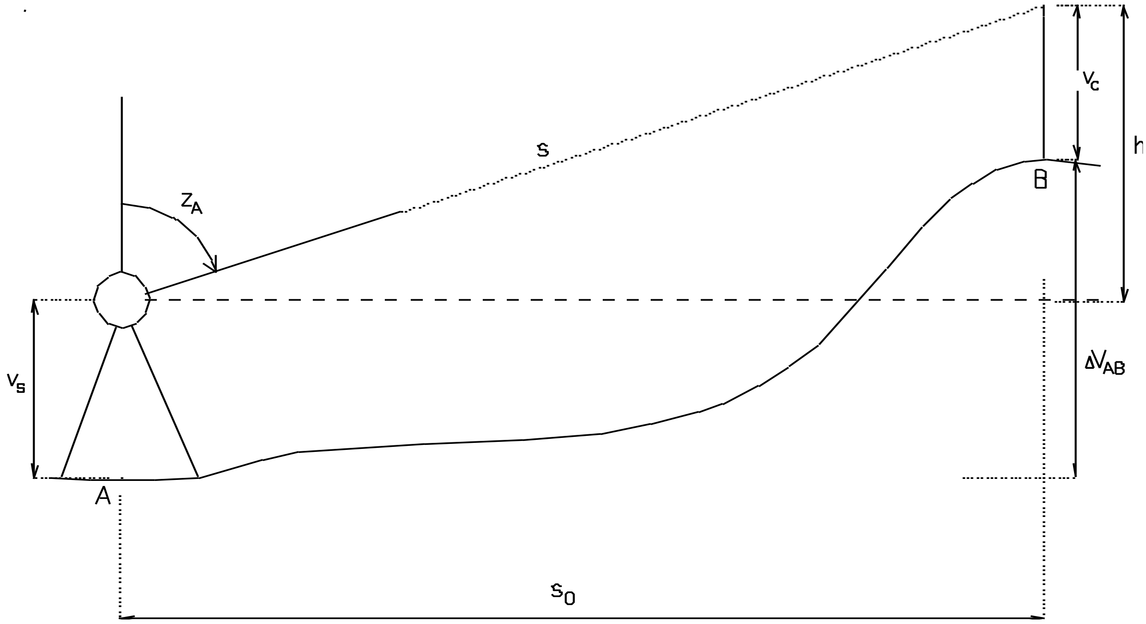
Číselný výpočet: Dosazením do vzorce [2.12] vypočteme vzdálenost věže od stanoviska S_2

$$x = \frac{b \cdot \cot g\, z_1 + l_1 - l_2}{\cot g\, z_2 - \cot g\, z_1} = 73{,}48 \text{ m}$$

stanovisko	S_1	S_2
b	74,87 m	
x	73,48 m	
s	148,35 m	73,48 m
z	$81{,}487^g$	$64{,}817^g$
h	44,40 m	45,32 m
l	1,86 m	0,94 m
H	46,26 m	46,26 m
H	46,26 m	

2.3. Určení nadmořské výšky bodu

Používáme při výpočtu výšek bodů bodových polí. Při vzdálenostech nad 300m je třeba zavádět opravu ze zakřivení Země a z refrakce.

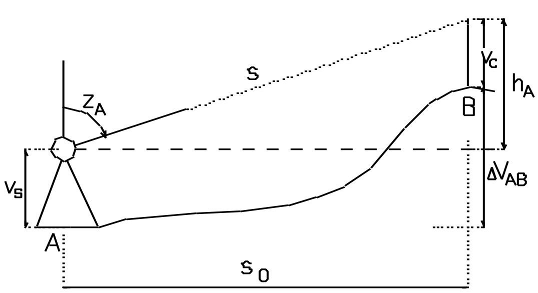


obr.2-11

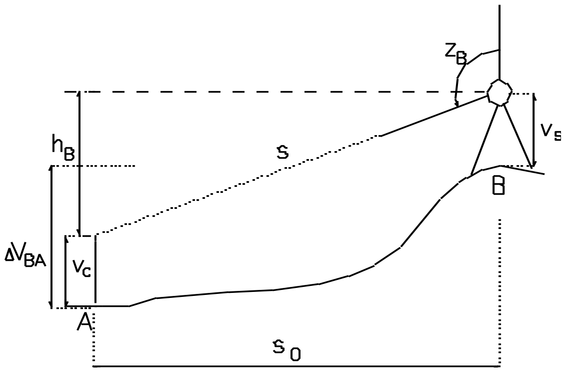
$$V_B = V_A + v_s + h - v_c \qquad [2.13]$$
$$\Delta V_{AB} = V_B - V_A$$
$$\Delta V_{BA} = V_A - V_B = -\Delta V_{AB}$$

$$h = s_0 \cdot \mathrm{cotg}\, z ; \quad h = s \cdot \cos z$$

Výškové rozdíly se zpravidla určují tam i zpět, do dalšího výpočtu se používá průměrná hodnota (rozdíl T a Z nesmí překročit mezní odchylku).



obr.2-12



obr.2-13

$$\Delta V_{AB} = T \qquad \Delta V_{BA} = Z$$

$$\Delta V_{AB} = \frac{T - Z}{2} \qquad \Delta V_{AB} = \frac{\Delta V_{AB} - \Delta V_{BA}}{2} \qquad [2.14]$$

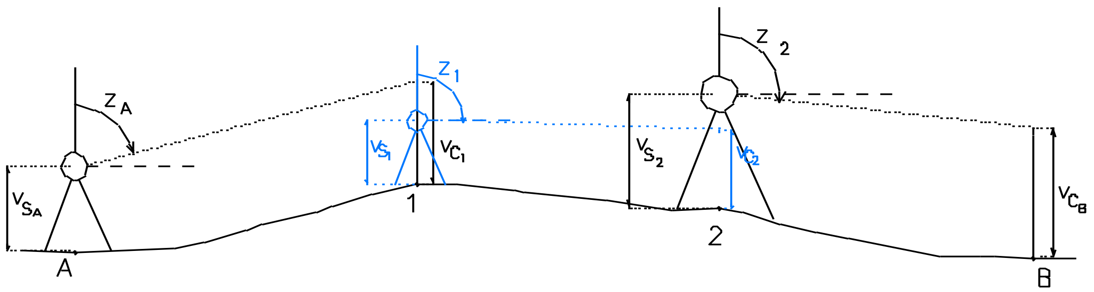
Výsledný výškový rozdíl je průměrem absolutních hodnot T a Z, zachová se znaménko převýšení T.

Při výpočtu výšek v polygonovém pořadu se vypočtený výškový rozdíl počátečního a koncového porovnává s výškovým rozdílem daným a odchylka O_V se rozdělí úměrně délkám stran ($\delta_{Vi} = \frac{O_V}{[s_i]} \cdot s_i$).

Příklad 2.6: Vypočtěte nadmořské výšky bodů 1,2.

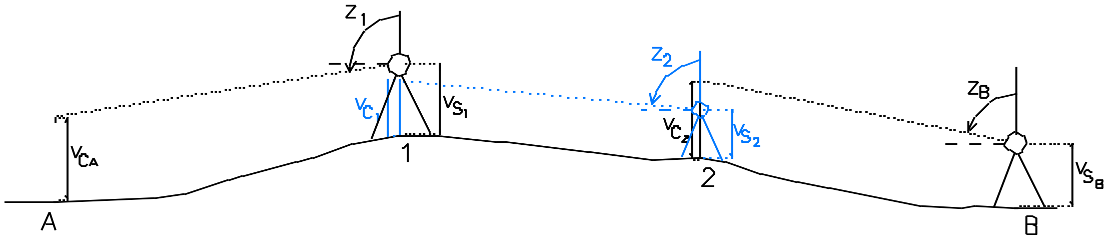
stanovisko	výška stroje m	záměra na bod	zenitová vzdálenost g	výška cíle m	vzdálenost m
A	1,46	1	91,285	1,50	148,36
1	1,50	A	108,712	1,50	148,36
		2	103,713	1,50	96,94
2	1,64	1	96,374	1,50	96,94
		B	106,529	1,50	162,17
B	1,38	2	93,462	1,50	162,17

měření tam



Obr.2-14a

měření zpět



obr.2-14b

Číselný výpočet: Vypočteme výškové rozdíly ΔV, odchylku O_v a výsledné výšky bodů 1,2. Odchylku O_v rozdělíme úměrně délkám stran.

stan.	záměra na bod	vzdálenost m	Δh (m)	v_s - v_c (m)	ΔV(m)	ΔV(m)	V (m)
A	1	148,36	20,44	-0,04	20,40	+1	546,74
1	A		-20,43	0	-20,43	20,42	567,17
	2	96,94	-5,66	0	-5,66	+1	
2	1		5,53	0,14	5,67	-5,67	561,51
	B	162,17	-16,69	0,14	-16,55	+2	
B	2		16,71	-0,12	16,59	-16,57	544,96
[ ]		407,47				-1,82	-1,78

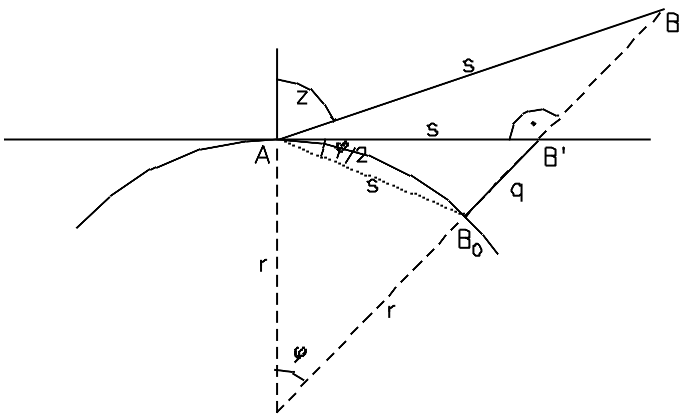
$$O_v = -1{,}78 - (-1{,}82) = 0{,}04 \text{ m}$$

2.4. Vliv zakřivení Země a refrakce na výškové rozdíly

Výškový rozdíl bodů A, B je vzdálenost od skutečného horizontu bodu A ke skutečnému horizontu bodu B měřená po svislici. Výšky určujeme ale od zdánlivého horizontu a je tedy třeba zjistit rozdíl skutečného a zdánlivého horizontu q (obr.2-15). Vlivem změny hustoty vzduchu v různých výškách dochází k refrakci světelného paprsku, který probíhá přibližně po kruhovém oblouku a my měříme úhel k tečně tohoto oblouku. Bod B se nám jeví zdánlivě v B“ a výškový rozdíl musíme opravit o q´ (obr.2-16). Oprava ze zakřivení a refrakce se zavádí společně a je v našich podmínkách vždy kladná (q je přibližně 7x větší než q´).

s…. vzdálenost bodů A,B
r…. poloměr Země
R….poloměr refrakčního oblouku
k….refrakční koeficient = poměr obou poloměrů, je závislý na nadmořské výšce, zeměpisné poloze, denní době, teplotě vzduchu, vegetačním porostu a dalších činitelích; používáme průměrnou hodnotu *k* = 0,1306
O…oprava ze zakřivení a refrakce (q….oprava ze zakřivení, q´….oprava z refrakce)

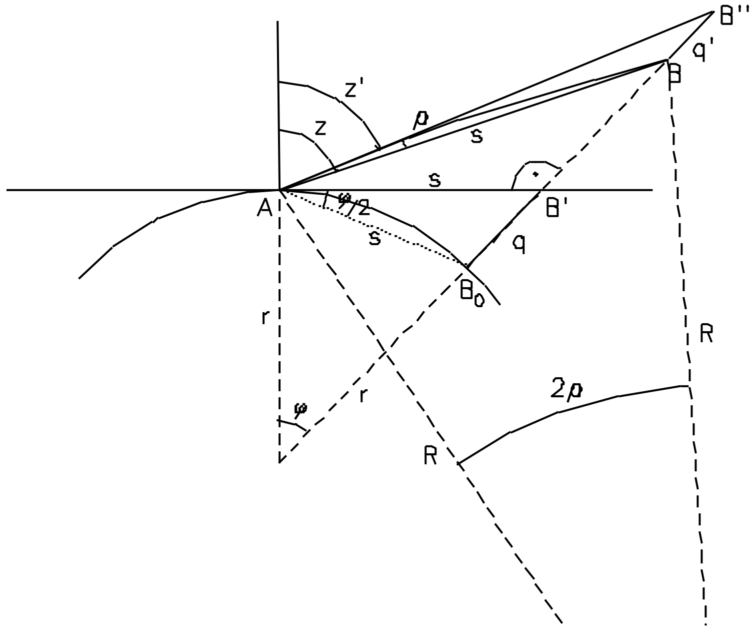
a. vliv zakřivení Země



obr.2-15

$$arc\,\varphi = \frac{s}{r}; \quad q = s \cdot arc\frac{\varphi}{2} = \frac{s^2}{2r} \qquad [2.15]$$

b. vliv refrakce



obr.2-16

$$\rho = z - z'; \; arc\,2\rho = \frac{s}{R}; arc\,\rho = \frac{s}{2R} = \frac{r \cdot arc\,\varphi}{2R} = \frac{r}{R} \cdot \frac{arc\,\varphi}{2} = k \cdot \frac{s}{2r}$$

$$q' = s \cdot arc\,\rho = k \cdot \frac{s^2}{2r} \qquad [2.16]$$

k…. refrakční koeficient, není stálý, závisí na nadmořské výšce, denní době, teplotě vzduchu, vegetačním porostu a dalších činitelích; používáme k = 0,1306

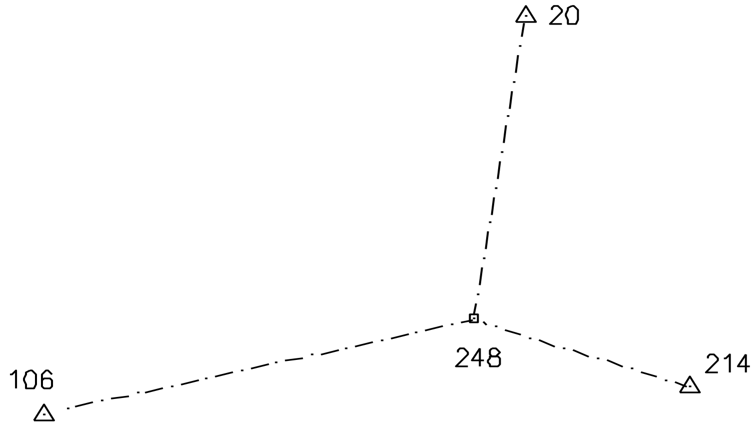
c. výsledná oprava ze zakřivení a refrakce

$$O = q - q' = \frac{s^2}{2r} - k \cdot \frac{s^2}{2r} = (1-k) \cdot \frac{s^2}{2r} = s^2 \cdot \frac{1-k}{2r} = o \cdot s^2 \qquad [2.17]$$

$o = \dfrac{1-k}{2r}$, je pro dané území a refrakční koeficient konstantní, pro r = 6380 km a k = 0,1306 se vypočte $o = \dfrac{1-0{,}1306}{2 \cdot 6380} = 6{,}81 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{km}^{-1}$

Pokud dosadíme do rovnice [2.17] r v km, s v m, vyjde oprava O v mm.

Příklad 2.7: Vypočtěte nadmořskou výšku bodu 248 z bodů 20, 106 a 214. Zenitové vzdálenosti byly měřeny na daných bodech i bodě určovaném. Výslednou výšku určete ze všech hodnot obecným (váženým) aritmetickým průměrem a zjistěte jeho střední chybu, váha $p_i = \frac{1}{s_i^2}$, kde s_i je délka v km.

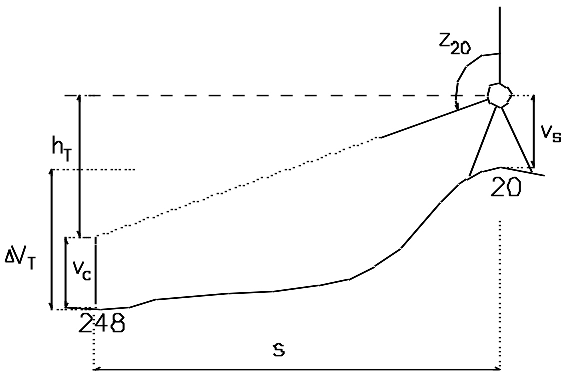


obr.2-17

výpis ze zápisníků na stanoviskách 20, 106, 214

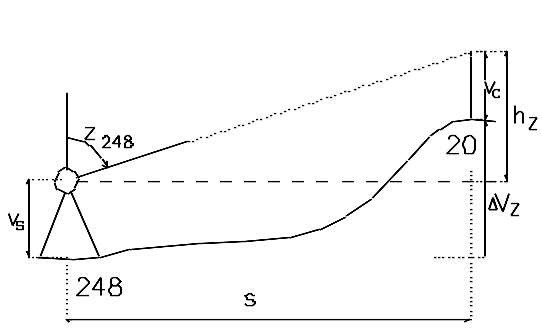
stanovisko	výška stroje m	výška cíle m	výška bodu m	záměra na bod	zenitová vzdálenost g	výška cíle m	vzdálenost m
20	1,60	2,00	297,21	248	102,7939	4,94	892,19
106	1,42	1,92	284,40	248	101,2900	4,94	1296,28
214	1,48	4,36	221,54	248	96,5504	4,94	674,24

měření tam



obr.2-18a

měření zpět



obr.2-18b

Zápisník měřených výškových úhlů

(1)

Nomenklatura: 1420

Číslo a název bodu: 248 U Krbu

Stanovisko: centrické

Měřil: M.N.

Měřeno dne: 10.12.2008

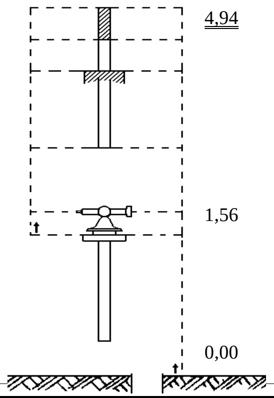
od 11.40 do 12.10

Theodolitem Theo 010 č. 296543

Theodolit postaven na stativu

Stav povětrnosti: zataženo, mírný vítr

Výšky nad měřickou značkou



(2) Číslo a název cíle	(3) Cílová značka (nákres)	(4) Poloha dalekohledu	(5) Skupina 1 2 Poznámka: J každého cíle se mě / pol. II. hned po pol. g	c	cc	(6) součet / průměr c	cc	(7) Kontrola (I + II) g	c	cc	(8) Výškový úhel / Zenitová vzdálenost g	c	cc
20 V Zálesí	v_c = 2,00	I	96	95	02, 06	95	04		i =	-90			
		II	303	06	79, 73	06	76	400	01	80	96	94	14
214 Hůrka	v_c = 4,36	I	102	87	27, 23	87	25		i =	-85			
		II	297	14	48, 42	14	45	400	01	70	102	86	40
106 Lada	v_c = 1,92	I	98	53	93, 87	53	90		i =	-96			
		II	301	48	04, 00	48	02	400	01	92	98	52	94
		I											
		II											
		I											
		II											
		I											
		II											
		I											
		II											
		I											
		II											
		I											
		II											
		I											
		II											

Vypočteme zápisník 2.19 - měřených výškových úhlů. Pro další výpočet lze použít zápisník 4.13 – výpočet výšek polygonového pořadu, případně si vyhotovit vlastní tabulku.

VÝPOČET VÝŠEK V POLYGONOVÉM POŘADU

Pořad č…… / Body pořadu	Zenitová vzdálenost z z měření tam T *) zpět Z	cotg z	Strany s	s.cotg z	Výšky nad kamenem: teodolitu	Výšky nad kamenem: cíle	O	(5)+(6) -(7)+(8)	oprava z vyr. **) $\frac{T - Z}{2}$	Nadm. výšky	O (oprava ze zakř. a refr.)
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)
	g c cc										
20										297,21	
	102 79 39		892,19	-39,18	1,60	4,94	0,05	-42,47	-42,49		
	96 94 14			42,90	1,56	2,00	0,05	42,51			
248										254,72	
106										284,40	
	101 29 00		1296,28	-26,27	1,42	4,94	0,11	-29,68	-29,69		
	98 52 94			29,95	1,56	1,92	0,11	29,70			
248										254,71	
214										221,54	
	96 55 04		674,24	36,57	1,48	4,94	0,03	33,14	33,13		
	102 86 40			-30,35	1,56	4,36	0,03	-33,12			
248										254,67	

*) smysl T odpovídá pořadí ze sl.1

**) rozdělí se úměrně délkám stran

[ ]

$$O = \frac{1 - k}{2r} \cdot s^2$$

Geodézie 4-13 MI 2008

Výslednou výšku vypočteme obecným aritmetickým průměrem.

i	stan.	o	s	p	δ	$p\delta$	v	pv	pvv
		m	km		cm	cm	cm		
1	20	254,72	0,89	1,262	12	15,144	-3	-3,786	11,358
2	106	254,71	1,30	0,592	11	6,512	-2	-1,184	2,368
3	214	254,67	0,67	2,228	7	15,596	2	4,456	8,912
[ ]		x_0 = 254,60		4,082		37,252		≈0	22,638

$$x = x_0 + \frac{[p\delta]}{[p]} = 254{,}60 \text{ m} + \frac{37{,}252}{4{,}082} \text{ cm} = 254{,}69 \text{ m}$$

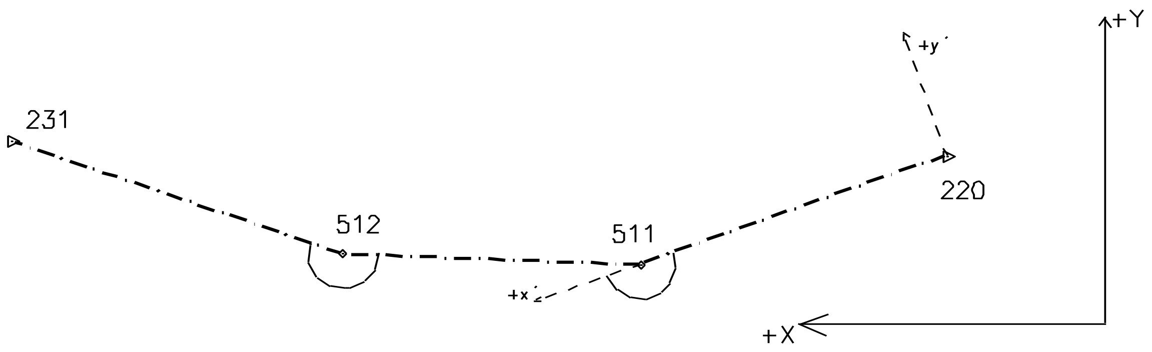
střední chyba obecného aritmetického průměru

$$m_x = \sqrt{\frac{[pvv]}{[p](n-1)}} \qquad m_x = \sqrt{\frac{22{,}638}{4{,}082 \cdot 2}} = 1{,}7 \text{ cm}$$

Příklad 2.8: Vypočtěte souřadnice a výšky bodů 511 a 512 zaměřených vetknutým polygonovým pořadem.

Dáno:

Bod	Y	X	Z
220	834 676,36	1 043 912,20	342,82
231	834 683,92	1 044 339,82	361,17



obr.2-19

Zápisník měřených úhlů a vzdáleností

Str.:

Číslo: stanoviska (1)	Číslo: cílového bodu (2)	Řada (3)	Vodorovné úhly (4) g	(4) c	(4) cc	průměr / redukovaný průměr (5) g	(5) c	(5) cc	Výsledná vzdálenost s (6) m	(6) cm	Svislé úhly (7) g	(7) c	(7) cc	průměr (8)	Kontrola I+II / Zenitová vzdálenost (9) g	(9) c	(9) cc	Redukce (11) cm	Vodorovná vzdálenost s_1 / s_2 (12) m	(12) cm	ΣO (13) cm	Poznámka (14): výška cíle	půlení
220 v_s= 1,62	511	I									94	34	40		400	01	60		148	40		1,50	
		II							148	42	305	67	20		94	33	60		148	41			
511	220	I	0	16	20	0	16	80			105	75	60		400	01	40		148	43		1,50	
		II	200	17	40	0	00	00	148	42	294	25	80		105	74	90		148	44			
v_s= 1,58	512	I	223	91	00	223	91	65			88	78	00		400	01	30		136	14		2,00	
		II	23	92	30	223	74	85	136	14	311	23	30		88	77	35		136	12			
512	511	I	1	48	90	1	49	50			110	88	83		400	01	26		136	14		2,00	
		II	201	50	10	0	00	00	136	14	289	12	43		110	88	20		136	15			
v_s= 1,66	231	I	219	87	35	219	87	92			107	52	80		400	01	44		159	98		1,50	
		II	19	88	49	218	38	42	159	96	292	48	64		107	52	08		159	95			
231 v_s= 1,63	512	I									92	59	85		400	01	30		159	96		1,50	
		II							159	96	307	41	45		92	59	20		159	95			

Geodézie č. 4.05 - 1983

$\Sigma O = O_1 + O_2 + O_3 + O_4$

O_1 z porovnání

O_2 z teploty

O_3 redukce na nulovou hladinu

O_4 ze zkreslení

VÝPOČET SOUŘADNIC BODŮ POLYGONOVÝCH POŘADŮ

Číslo pořadu	s(1+|sin σ|+|cos σ|) / Číslo bodu	Úhly a úhlové vyrovnání g	c	cc	Směrníky σ g	c	cc	Strany s	|sin σ| / 1+|sin σ|+|cos σ| / |cos σ|	Souřadnice a souřadnicové vyrovnání Y	X
(1)	(2)	(3)			(4)			(5)	(6)	(7)	(8)
	220										
	511				0	00	00	148,42		0.00	148,42
		223	74	85							
	512				23	74	85	136,14		49,62	126,78
		218	38	42							
	231				42	13	27	159,96		98,30	126,19
								444,52		[Δy']= 147,92	[Δx']= 401,39
										σ'= 22,4776^g	s' = 427,78 m
										σ= 1,1254^g	s = 427,69 m
										σ_{P1} = 378,6478^g	Os = -0,09 m
											Δ s = 0,23 m
											Os <Δs
	220									834 676,36	1 043 912,20
											-3
	511				378	64	78	148,42		-48,85	140,15
		223	74	85						834 627,51	1 044 052,32
											-2
	512				2	39	63	136,14		5,12	136,04
		218	38	42						834 632,63	1 044 188,34
											-3
	231				20	78	05	159,96		51,29	151,51
										834 683,92	1 044 339,82
										ΔY = 7,56	ΔX = 427,62
								444,52		[Δy']= 7,56	[Δx']= 427,70
										Oy = 0	Ox = -0,08
										Op = 0,08	
										Δp = 0,23 m	Op <Δp

Geodézie č. 4.12 - 1971

Pro výpočet výšek spočteme vzdálenosti ze souřadnic. Výšky vypočteme v zápisníku 4.13.

str.:……...

VÝPOČET VÝŠEK V POLYGONOVÉM POŘADU

Pořad č…… / Body pořadu	Zenitová vzdálenost z z měření tam T *) zpět Z	cotg z	Strany s	s.cotg z	Výšky nad kamenem teodolitu	Výšky nad kamenem cíle	O	(5)+(6) -(7)+(8)	oprava z vyr. **) $\frac{T - Z}{2}$	Nadm. výšky	O (oprava ze zakřivení a refrakce)
(1)	(2)	(3)	(4)	(5)	(6)	(7)	(8)	(9)	(10)	(11)	(12)
	g c cc										
220										342,82	$O = \frac{1-k}{2r} \cdot s^2$
	94 33 60		148,42	13,24	1,62	1,50		13,36	-1		
	105 74 90			-13,44	1,58	1,50		-13,36	13,36		
511										356,17	
	88 77 35		136,14	24,26	1,58	2,00		23,84			
	110 88 20			-23,50	1,66	2,00		-23,84	23,84		
512										380,01	
	107 52 08		159,96	-18,99	1,66	1,50		-18,83	-1		
	92 59 20			18,70	1,63	1,50		18,83	-18,83		
231										361,17	
*) smysl T odpovídá pořadí ze sl.1 **) rozdělí se úměrně délkám stran ∑									18,37	18,35	Ov = -0,02

Geodézie 4-13 MI 2008

Seznam souřadnic a výšek

Bod	Y	X	Z
511	834 627,51	1 044 052,32	356,17
512	834 632,63	1 044 188,34	380,00

3. Výpočet kubatur

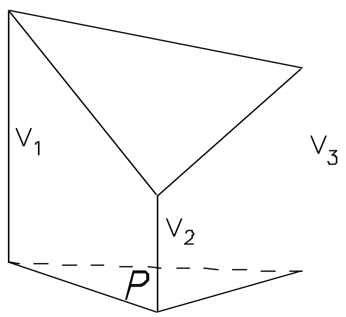
Kubatury určujeme pro zjišťování objemu různých hmot ve stavebnictví, kontrolu těžby v povrchových dolech apod.

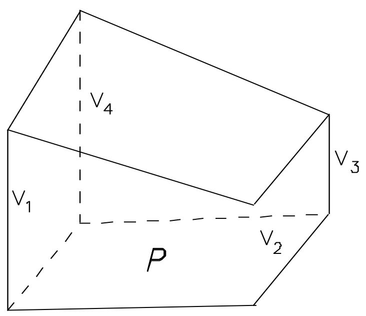
Využíváme základních vzorců pro objemy těles z matematiky.

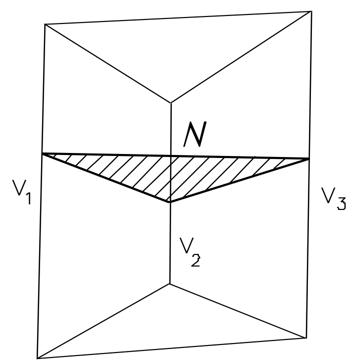
Přehled vzorců:

objem krychle $V = a^3$
kvádru $V = a * b * c$
hranolu $V = P * v$ P…obsah podstavy, v… výška hranolu

V terénu lze prostor rozdělit na hranoly šikmo seříznuté jednou nebo dvěma rovinami. V takovém případě je potřeba spočítat průměrnou výšku a tu vynásobit obsahem podstavy.







Objem hranolu šikmo seříznutého jednou rovinou $V = P * \frac{v_1 + v_2 + ...v_n}{n}$, kde P je obsah podstavy, n je počet hran (výšek).

Objem hranolu šikmo seříznutého dvěma rovinami $V = N * \frac{v_1 + v_2 + ...v_n}{n}$, kde N je obsah normálového řezu (kolmý k hranám), n je počet hran (výšek).

Obsahy podstav se mohou počítat rozkladem na základní geometrické obrazce (trojúhelník, lichoběžník, čtyřúhelník) nebo ze souřadnic pomocí L'Huillierových vzorců.

Kubatury se nejčastěji určují:

1. ze čtvercové sítě
2. z profilů
3. z vrstevnicového plánu

3.1. Výpočet kubatur ze čtvercové sítě

Zájmové území rozdělíme pravoúhelníkovou sítí. Rohy dočasně stabilizujeme. Nivelací určíme výšky terénu v jednotlivých rozích a vypočteme kubaturu nad zvolenou srovnávací rovinou. Použijeme vzorce pro výpočet hranolu šikmo seříznutého rovinou.

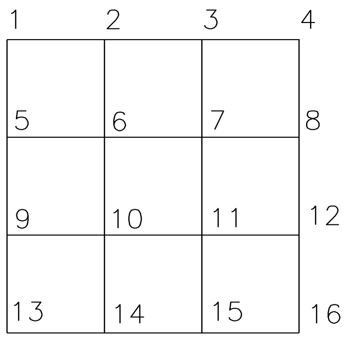
Pokud máme určit průměrnou výšku upravovaného prostoru tak, aby nebylo potřeba žádný materiál odvážet ani přivážet, musíme spočítat průměrnou výšku terénu nad srovnávací rovinou.

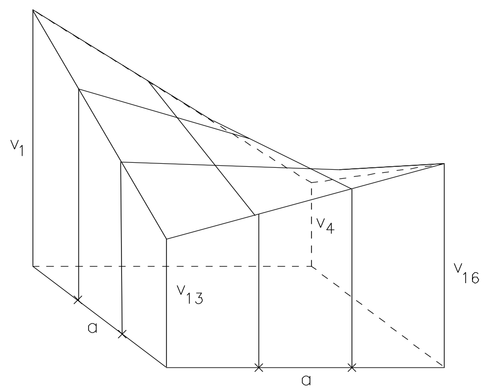
3.1.1. výpočet výšky terénu

$$v = \frac{v_1 + v_2 + v_3 + v_4}{4}$$

v_1, v_2, v_3, v_4 …. výšky rohů sítě

Pokud je prostor rozdělen na víc čtverců lze průměrnou výšku spočítat váženým aritmetickým průměrem, kde body v rozích mají váhu $p_1 = 1$, body po vnějších hranách váhu $p_2 = 2$ a body uvnitř mají váhu $p_3 = 4$.





$$v = \frac{p_1(v_1 + v_4 + v_{13} + v_{16}) + p_2(v_2 + v_3 + v_5 + v_8 + v_9 + v_{12} + v_{14} + v_{15}) + p_3(v_6 + v_7 + v_{10} + v_{11})}{[p]}$$

v našem případě $[p] = 4p_1 + 8p_2 + 4p_3 = 36$

3.1.2. výpočet kubatury

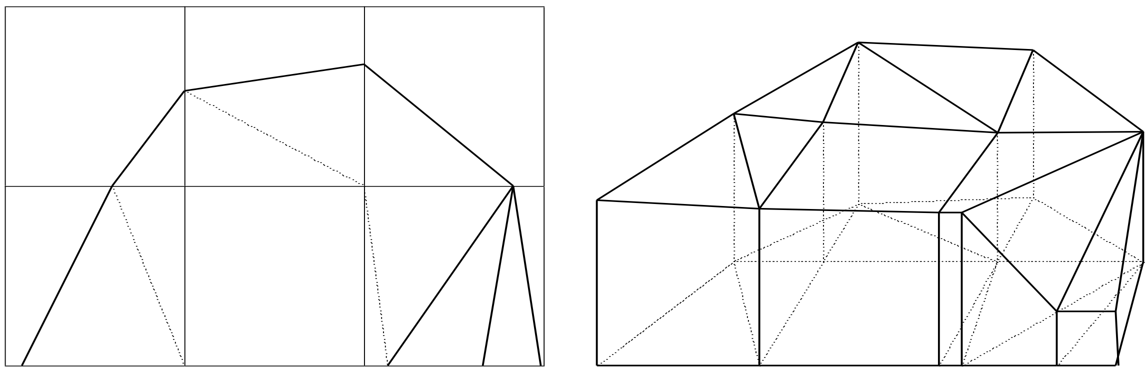
$$V = P * v$$

kde P je plocha zaměřovaného území, např. $9a^2$, a…je velikost strany čtverce.

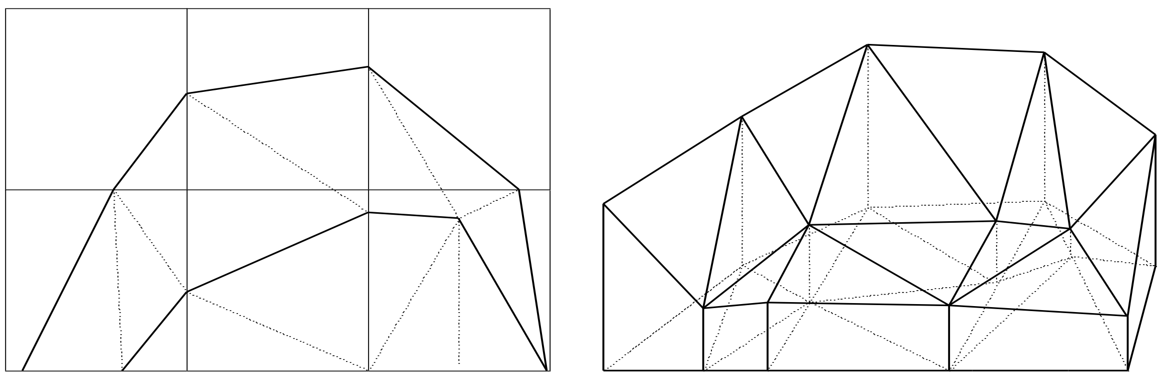
3.1.3. výpočet kubatury v kubaturní mapě

Čtvercovou síť lze využít při kontrole těžby v povrchových dolech. V zájmovém prostoru se vytyčí čtvercová síť a zanivelují se její rohy a hranice úpravy. Vypočítá se kubatura nad srovnávací rovinou před těžbou a po těžbě.

před těžbou



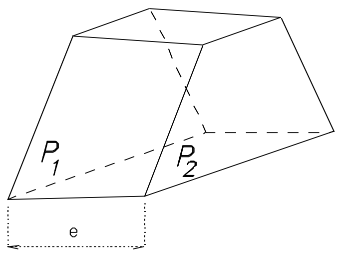
po těžbě



3.2. Výpočet kubatur z profilů

Používá se u liniových staveb. Z příčných profilů zjistíme plochy jednotlivých příčných řezů a jejich vzdálenosti

Kubatura mezi dvěma profily:

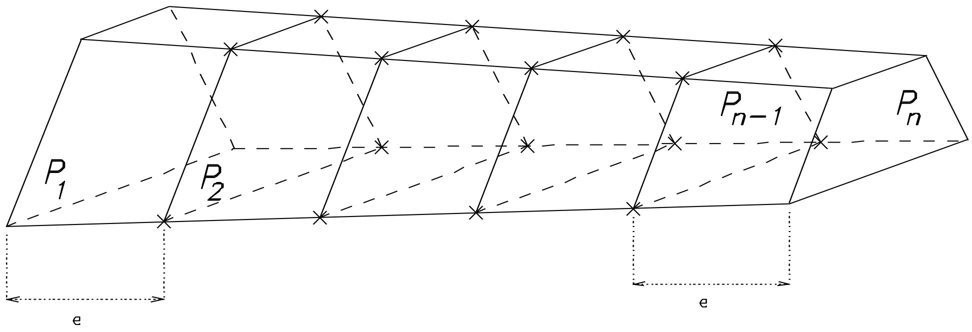


$$V = \frac{P_1 + P_2}{2} * e ,$$

kde P_1, P_2… plochy příčných řezů; e…vzdálenost příčných řezů (ekvidistanta)

Při výpočtu mezi více profily lze při jejich stejné vzdálenosti e použít vzorce:

$$V = \left(\frac{P_1}{2} + P_2 + P_3 + ... + P_{n-1} + \frac{P_n}{2} \right) * e$$

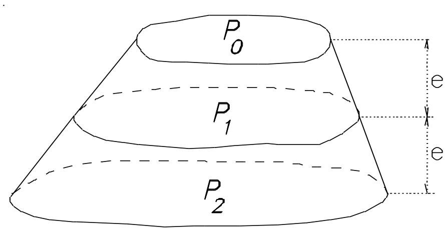


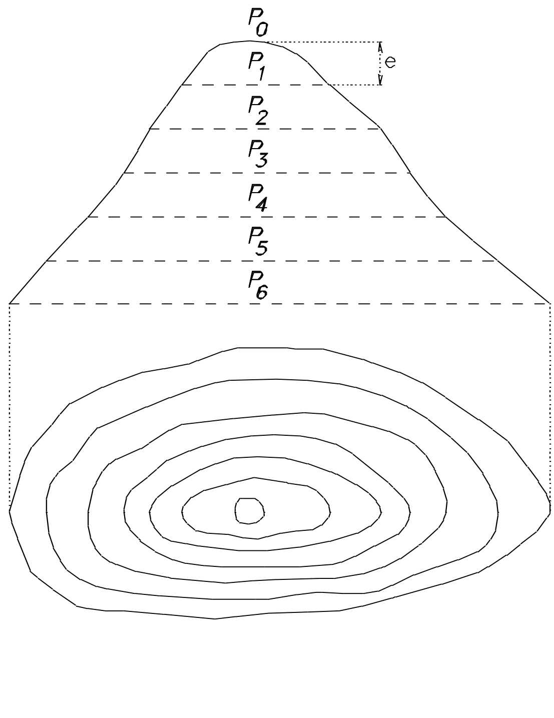
3.3. Výpočet kubatur z vrstevnicového plánu

Pro výpočet je třeba zjistit plochy jednotlivých vrstevných rovin a jejich odlehlost (ekvidistantu). Výpočet se provede Simpsonovým vzorcem, počet vrstev musí být sudý.

Pro 2 vrstvy platí $V = \frac{e}{3} * \left(P_0 + 4P_1 + P_2 \right)$

Pro n vrstev platí $V = \frac{e}{3} * \left[P_0 + 4\left(P_1 + P_3 + ... + P_{n-1} \right) + 2\left(P_2 + P_4 + ... + P_{n-2} \right) + P_n \right]$, kde n je sudé.





4. Vyrovnávací počet

Při měření všech veličin se objevují měřické chyby. Jsou způsobeny nedokonalostí pomůcek a nepozorností měřiče. Většina chyb se odstraní opakovaným měřením, měřickým postupem a pečlivou prací. Vyrovnávat lze pouze výsledky, které obsahují zbytkové chyby systematické a chyby nahodilé.

Opakovaným měřením téže veličiny za prakticky stejných podmínek vzniká **základní (stejnorodý) soubor výsledků**, které jsou zatíženy měřickými chybami. Protože ale ve většině případů neznáme **absolutně správnou hodnotu určované veličiny**, zjistíme z výsledků měření pouze **nejpravděpodobnější hodnotu** a její spolehlivost (přesnost měření a výsledku).

4.1. Charakteristiky měřických chyb

Měřické chyby rozdělujeme na

3) omyly – jsou rozpoznatelné na první pohled, např. zapomenutý klad pásma, záměna číslic; měření nelze použít
4) chyby hrubé – přesahují mezní odchylku metody měření, odstraní se opakovaným měřením; z dalšího zpracování je musíme vyloučit
5) chyby nevyhnutelné – vyskytují se v měření vždy, dělí se na
   - systematické
     - konstantní
     - proměnlivé
     - periodické
   - nahodilé

Chyby systematické se odstraňují početně nebo měřickým postupem. Vyrovnávat lze pouze hodnoty obsahující chyby nahodilé a zbytkové chyby systematické.

Skutečná chyba (ε)

Skutečnou chybu (ε) definujeme jako rozdíl absolutně správné hodnoty měřené veličiny (skutečné) X a naměřené hodnoty o_i :

$$\varepsilon_i = X - o_i \quad (i = 1,2\ldots.n \text{ je počet opakovaných měření}) \qquad [3.1]$$

Skutečnou hodnotu X známe jen výjimečně, proto i skutečnou chybu **ε** můžeme určit jen zřídka (skutečnou chybou je například uzávěr úhlů v trojúhelníku – součet má být 180°).

Nejpravděpodobnější chyba (v)

Pro vyrovnání pozorování přímých stejné váhy je nejpravděpodobnější hodnotou aritmetický průměr

$$x = \frac{o_1 + o_2 + \ldots.. + o_n}{n} = \frac{[o]}{n} \qquad [3.2]$$

Nejpravděpodobnější chyba je tedy definována jako rozdíl nejpravděpodobnější hodnoty x a naměřené hodnoty o_i :

$$v_i = x - o_i \quad (i = 1,2\ldots.n \text{ je počet opakovaných měření}) \qquad [3.3]$$

Nejpravděpodobnější chyby v_i jsou podle rovnice [3.3] odchylky od aritmetického průměru a zároveň jsou to opravy naměřených hodnot.

4.2. Charakteristiky přesnosti měření

Výsledky měření lze posuzovat podle různých kriterií. Pro měření a výpočty mají význam tyto chyby.

a) **průměrná (lineární) chyba** $\bar{s}$ je aritmetický průměr absolutních hodnot všech chyb $\boldsymbol{\varepsilon}$

$$\bar{s} = \frac{[|\varepsilon|]}{n} \qquad [3.4]$$

b) **základní střední (kvadratická) chyba** $\bar{m}$ je definována jako kvadratický průměr všech chyb $\boldsymbol{\varepsilon}$

$$\bar{m} = \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}} \qquad n \to \infty \qquad [3.5]$$

nebo při výpočtu z oprav $\boldsymbol{v}$:

$$\bar{m} = \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}} \qquad n \to \infty \qquad [3.6]$$

Vzhledem k tomu, že $\bar{m}$ je citlivější na větší chyby než s**,** používá se v geodézii téměř vždy základní střední (kvadratické) chyby jako charakteristiky přesnosti.

Základní střední (kvadratické) chyba $\bar{m}$ je dána metodou a podmínkami při měření (stroj, ostatní pomůcky, zkušenosti měřiče). Teoreticky je to střední hodnota všech chyb v základním souboru, kdy počet měření $n \to \infty$. Její hodnota je pro danou metodu měření konstantní ($\bar{m}$ =konst.). V praxi ji nahrazujeme hodnotou určenou z velkého počtu měření, provedených za stejných podmínek a říkáme jí **střední chyba metody měření** (např. střední chyba uvedená u měřických přístrojů).

Při menším počtu měření jsou výsledky a jejich chyby jen náhodným výběrem ze základního souboru. Střední chybu v tomto případě počítáme pro n konečné (n je počet měření).

$$m = \sqrt{\frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}} \qquad n \text{...počet měření} \qquad [3.7]$$

$$m = \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}} \qquad [3.8]$$

a říkáme jí **výběrová střední chyba** nebo **odhad základní střední chyby** (střední chyba jednoho měření).

c) **pravděpodobná chyba** $\bar{r}$

$$\text{pravděpodobnost } P(r) = \frac{1}{2} \qquad [3.9]$$

přibližnou hodnotu *r* můžeme určit tak, že uspořádáme chyby podle jejich velikosti a najdeme hodnotu uprostřed (tzv. medián). Chyba může být se stejnou pravděpodobností větší nebo menší než základní pravděpodobná chyba.

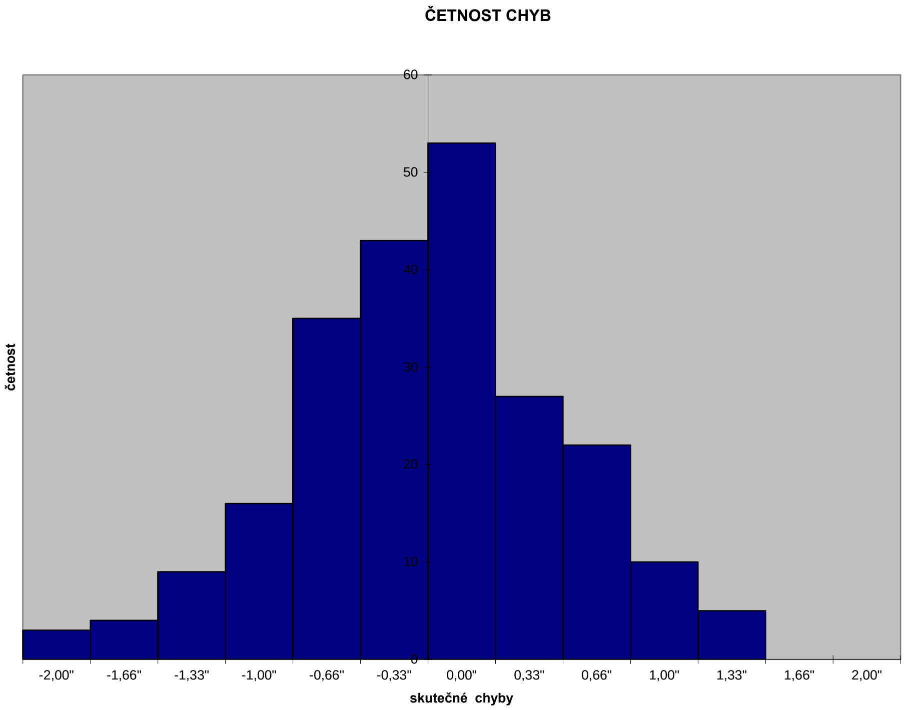
Vztah mezi velikostí chyb lze vyjádřit poměrem $\bar{m} : \bar{s} : \bar{r} = 1 : 0{,}80 : 0{,}67$

4.3. Vlastnosti nahodilých chyb

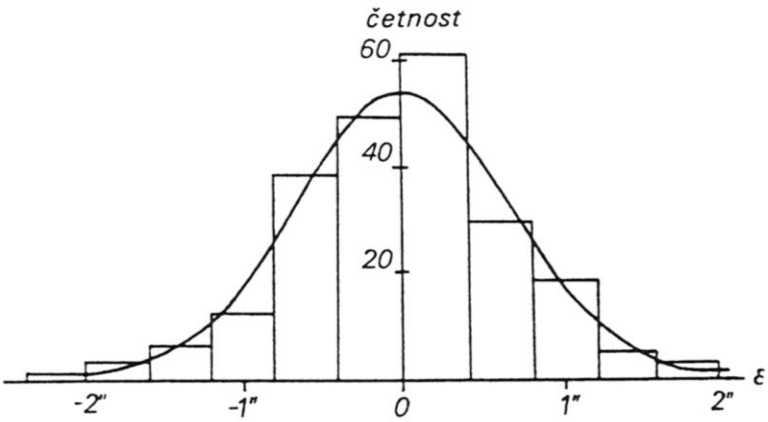
Jednotlivá chyba se neřídí žádným zákonem, nedokážeme předvídat její velikost, ani znaménko. V dostatečně velkém souboru nahodilých chyb lze ale zjistit určité vlastnosti těchto chyb.

Vlastnosti nahodilých chyb si vysvětlíme na příkladu 227 uzávěrů trojúhelníků československé trigonometrické sítě. Chyby seskupíme do intervalů po 0,33“ a sestrojíme sloupcový graf (histogram). Chyby dosahují hodnot do ± 2,01“. Hodnota – 2,01“ je zahrnuta v intervalu $\langle -1{,}66'', -2{,}00'' \rangle$.

INTERVAL	POČET UZÁVĚRŮ (ČETNOST)		
	+	-	součet
0,00“ – 0,33“	53	43	96
0,33“ – 0,66“	27	35	62
0,66“ – 1,00“	22	16	38
1,00“ – 1,33“	10	9	19
1,33“ – 1,66“	5	4	9
1,66“ – 2,00“	0	3	3
Celkem	117	100	227



obr.3-1



obr.3-2

Z dostatečně velkého souboru vyplývá, že nahodilé chyby podléhají určitým zákonitostem jak ukazuje Gaussova křivka:

1) kladné a záporné chyby stejné velikosti jsou stejně četné
2) čím je chyba menší, tím je četnější
3) největší četnost má chyba nulová
4) v praxi nepřekročí chyby určitou mez

Mezní chyby – největší přípustné chyby.

Stanoví se směrnicemi a předpisy. Mezní chyba se vypočítá ze součinu střední chyby metody měření $\overline{m}$ a tzv. koeficientu spolehlivosti *t*.

$$u = t \cdot \overline{m} \qquad [3.10]$$

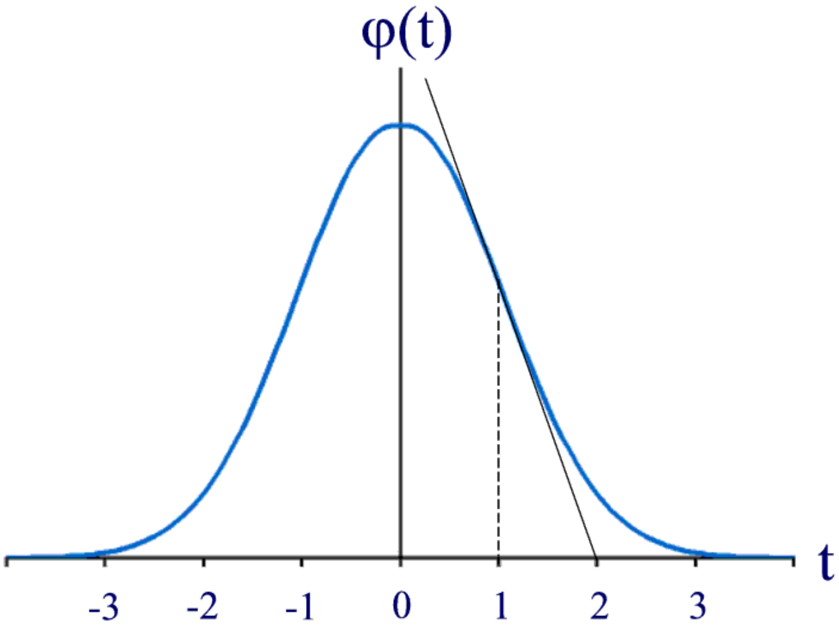
t se volí nejčastěji 2- 3 dle náročnosti prováděného měření a podmínek při měření.

S velikostí intervalu spolehlivosti souvisí pravděpodobnost, že nahodilá chyba bude ležet na tomto intervalu.

INTERVAL	KOEFICIENT *t*	pravděpodobnost %
$-\overline{m};+\overline{m}$	1	68
$-2\overline{m};+2\overline{m}$	2	95
$-3\overline{m};+3\overline{m}$	3	99,7

Mezní (dopustné) odchylky *u* jsou vhodným kriteriem pro nepřípustné skutečné chyby (např. uzávěry trojúhelníků). Pro rozdíly dvojího měření (délky, úhlu, převýšení, plochy) se určují největší dovolené odchylky, tzv. **mezní rozdíly.**

$$u_{mez} = u \cdot \sqrt{2} \qquad [3.11]$$



obr.3-3

4.4. Základy vyrovnávacího počtu

Ve vyrovnávacím počtu předpokládáme, že z měřených hodnot jsme vyloučili omyly, hrubé chyby a většinu chyb systematických a snažíme se najít hodnotu, která se co nejvíce blíží hodnotě skutečné (*X*).Vlivem nahodilých měřických chyb dostáváme pro měřenou veličinu číselné hodnoty, které se v určitých mezích liší. Výsledek hledáme vyrovnáním z naměřených hodnot.

Vyrovnání lze rozdělit na

a) pozorování přímá stejné váhy – měříme přímo hledanou veličinu jednou pomůckou (měření délky pásmem)
b) pozorování přímá nestejné váhy - měříme přímo hledanou veličinu různě přesnými pomůckami (měření délky pásmem, nitkovým dálkoměrem, elektrooptickým dálkoměrem)
c) pozorování zprostředkující – měříme veličinu, z které neznámou určíme výpočtem (např. při protínání vpřed vyrovnáváme souřadnice, měříme vodorovné směry)
d) pozorování podmínková – vyrovnané hodnoty musí vyhovovat určité podmínce (součet úhlů v n-úhelníku)

V tomto učebním textu se budeme věnovat pouze pozorováním přímým stejných a různých vah.

Gauss na základě pravděpodobnosti dokázal (Gaussův zákon chyb), že vyrovnaná hodnota ***x*** se nejvíce přiblíží skutečné (absolutní) hodnotě ***X*** je-li splněna podmínka minima.

Vyrovnanou veličinu ***x*** budeme tedy hledat tak, aby vyhovovala podmínce

$[vv]=$ minimum, pro pozorování přímá stejné váhy [3.12]

$[pvv]=$ minimum, pro pozorování přímá nestejné váhy [3.13]

Vyrovnaná veličina musí vyhovovat Gaussově podmínce minima.

Váha pozorování.
Pokud pro nás mají výsledky pozorování stejnou přesnost, říkáme, že mají stejnou váhu. Nemají-li stejnou přesnost, mluvíme o nestejné váze a každému pozorování přiřadíme číslo *p* – tzv. váhu, která vyjadřuje přesnost jednotlivých pozorování a závisí na střední chybě. Čím je váha větší, tím je větší přesnost tohoto pozorování. Platí, že váha je nepřímo úměrná čtverci střední chyby.

$$p_1 : p_2 : p_3 : .... : p_n = \frac{k}{\bar{m}_1^2} : \frac{k}{\bar{m}_2^2} : \frac{k}{\bar{m}_3^2} : .... : \frac{k}{\bar{m}_n^2} \qquad [3.14]$$

$$p_i = \frac{k}{\bar{m}_i^2} \qquad [3.15]$$

pro pozorování s váhou $p_0 = 1$ vyjadřuje *k* jednotkovou střední chybu

$$k = \bar{m}_0^2 \quad \text{… čtverec jednotkové střední chyby} \qquad [3.16]$$

4.4.1. vyrovnání pozorování přímých stejné váhy

$o_1, o_2, ... o_n$ výsledky jednotlivých pozorování
x vyrovnaná hodnota
$v_1, v_2, ... v_n$ opravy $v_1 = x - o_1$, $v_2 = x - o_2$, ….. $v_n = x - o_n$

Gaussova podmínka minima

$$[vv] = (x-o_1)^2 + (x-o_2)^2 + ... + (x-o_n)^2 = \text{min.} \qquad [3.15]$$

Výraz má nejmenší hodnotu pro takové *x*, pro které je první derivace výrazu rovna 0.

$$2(x-o_1) + 2(x-o_2) + ... + 2(x-o_n) = 0 \qquad [3.16]$$

$$x = \frac{o_1 + o_2 + ... + o_n}{n} = \frac{[o]}{n} \quad \text{…aritmetický průměr} \qquad [3.17]$$

$$[v] = 0 \quad \text{….kontrola} \qquad [3.18]$$

Vyrovnaná hodnota se u pozorování přímých stejné váhy určí aritmetickým průměrem z naměřených veličin a součet oprav v je roven 0 (kontrola výpočtu).
Vyrovnaná veličina x se neshoduje s teoreticky správnou hodnotou X a je v ní určitá chyba ε_x, tj.skutečná chyba aritmetického průměru, která udává přesnost měření. Zpravidla ji neznáme, na její velikost usuzujeme ze **střední chyby aritmetického průměru m_x**.

$\varepsilon_x = X - x$ ….skutečná chyba aritmetického průměru (neznáme ji) [3.19]

$$\varepsilon_1 = X - o_1$$
$$\varepsilon_2 = X - o_2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$\varepsilon_n = X - o_n$$
$$[\varepsilon] = nX - [o]$$

$X = \frac{[o]}{n} + \frac{[\varepsilon]}{n}$, ze vzorce [3.17, 3.19] vyplývá

$$X = x + \frac{[\varepsilon]}{n}$$

$$\varepsilon_x = \frac{[\varepsilon]}{n} \qquad [3.20]$$

Podle Gaussova zákona nahodilých chyb mají chyby ε různá znaménka, proto se lineární výrazy po umocnění budou rovnat přibližně 0.

$$\varepsilon_x = \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots. + \varepsilon_n}{n}$$

$$m_x^2 = \frac{\varepsilon_1^2 + \varepsilon_2^2 + \ldots + \varepsilon_n^2 + 2(\varepsilon_1\varepsilon_2 + \varepsilon_2\varepsilon_3 + \ldots)}{n^2}$$

lineární výrazy zanedbáme, rovnají se přibližně 0 a po aplikaci zákona hromadění středních chyb dostáváme

$$\overline{m_x}^2 = \frac{\overline{m_1}^2 + \overline{m_2}^2 + \ldots + \overline{m_n}^2}{n^2} = \frac{[\overline{m_i}^2]}{n^2} = \frac{n}{n} \cdot \frac{\overline{m}^2}{n} = \frac{\overline{m}^2}{n}$$

$$\overline{m}_x^2 = \frac{\overline{m}^2}{n} \qquad [3.21]$$

$$\overline{m}_x = \frac{\overline{m}}{\sqrt{n}} \quad \text{pro } n \to \infty \qquad [3.22]$$

pro $n \to$ konečné bude použito $m,\ m_x$

$$m_x^2 = \frac{m^2}{n} \qquad [3.23]$$

$$m_x = \frac{m}{\sqrt{n}} \qquad [3.24]$$

U pozorování přímých stejné váhy klesá chyba výsledné hodnoty (aritmetického průměru) s odmocninou z počtu pozorování.

Střední chyby ale počítáme z oprav a je tedy třeba odvodit vzájemný vztah mezi chybou ε a opravou v.

$$\varepsilon_x = X - x = X - o_1 + o_1 - x = \varepsilon_1 - v_1$$

$$\varepsilon_x = X - x = X - o_2 + o_2 - x = \varepsilon_2 - v_2$$ podle vzorců [3.19]; [3.1]; [3.3]

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_x + v_1$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_x + v_2$$

$$\varepsilon_1^2 = \varepsilon_x^2 + 2\varepsilon_x v_1 + v_1^2$$

$$\varepsilon_2^2 = \varepsilon_x^2 + 2\varepsilon_x v_2 + v_2^2$$

$$[\varepsilon\varepsilon] = n\varepsilon_x^2 + 2\varepsilon_x [v] + [vv],$$ ε_x^2 nahradíme podle zákona hromadění skutečných chyb m_x^2

$$[\varepsilon\varepsilon] = nm_x^2 + 2\varepsilon_x [v] + [vv]$$

Z předchozího odvozování vyplývá:

a) $[v] = 0$ [3.18]…z Gaussovy podmínky minima

b) $nm_x^2 = m^2$ [3.23]… $m_x^2 = \frac{m^2}{n}$

c) $[\varepsilon\varepsilon] = nm^2$ po úpravě vzorce [3.7]… $m^2 = \frac{[\varepsilon\varepsilon]}{n}$

a rovnice bude po úpravě: $nm^2 = m^2 + [vv]$

$$m = \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}}$$, tj. výběrová střední chyba jednoho pozorování [3.25]

dosazením do [3.23] $m_x^2 = \frac{m^2}{n} = \frac{\frac{[vv]}{n-1}}{n}$ bude

$$m_x = \frac{m}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{[vv]}{n(n-1)}}$$, tj. výběrová střední chyba aritmetického průměru [3.26]

Odchylku s jakou je vyrovnaná hodnota určena udává základní střední (kvadratická) chyba $\overline{m}_x$. V praxi se uvažuje interval spolehlivosti $x \pm 2{,}5\overline{m}_x$, ve kterém s praktickou jistotou leží skutečná hodnota X.

Výsledek měření $x \pm \overline{m}_x$ tvoří pár sdružených čísel, které při dalším počítání musí být neodlučitelně spolu. Nejistota výsledku se přenáší na součet, rozdíl nebo libovolnou funkci měřených veličin. Zákon přenášení (hromadění) nahodilých a středních chyb v praktickém měření ovlivňuje výběr metody měření, přístrojové techniky a výpočetního postupu.

4.4.2. vyrovnání pozorování přímých nestejné váhy

$o_1, o_2, \ldots o_n$	výsledky jednotlivých pozorování
$p_1, p_2, \ldots p_n$	váhy jednotlivých pozorování (váha p_1 pro měření o_1) $p_1 \rightarrow o_1$
x	vyrovnaná hodnota
$v_1, v_2, \ldots v_n$	opravy $v_1 = x - o_1$, $v_2 = x - o_2$, ….. $v_n = x - o_n$

Gaussova podmínka minima

$$[pv^2] = p_1(x-o_1)^2 + p_2(x-o_2)^2 + \ldots + p_n(x-o_n)^2 = \min. \qquad [3.27]$$

Výraz má nejmenší hodnotu pro takové *x*, pro které je první derivace výrazu rovna 0.

$$2p_1(x-o_1) + 2p_2(x-o_2) + \ldots + 2p_n(x-o_n) = 0$$

$$x = \frac{p_1 o_1 + p_2 o_2 + \ldots + p_n o_n}{p_1 + p_2 + \ldots + p_n} = \frac{[po]}{[p]} \ \text{…. obecný (vážený)}$$

aritmetický průměr [3.28]

$$[pv] = 0 \ \text{….kontrola} \qquad [3.29]$$

Vyrovnaná hodnota se u pozorování přímých nestejné váhy určí váženým aritmetickým průměrem (obecným) z naměřených veličin a příslušných vah, součet součinu vah *p* a oprav *v* je roven 0 (kontrola výpočtu).
Vyrovnaná hodnota ***x*** se opět liší od teoretické hodnoty ***X***, takže obsahuje střední chybu m_x a bude mít váhu p_x.
Stejně jako pro pozorování přímá stejné váhy lze odvodit střední chyby pro:

a) jednotlivé pozorování o váze p_i ….. m_i

$$m_i = \sqrt{\frac{[pvv]}{p_i(n-1)}} \qquad [3.30]$$

b) pozorování o váze $p_0 = 1$….. m_0 střední chyba jednotková

$$m_0 = \sqrt{\frac{[pvv]}{n-1}} \qquad [3.31]$$

c) aritmetický průměr ….. m_x

$$m_x = \sqrt{\frac{[pvv]}{[p](n-1)}} \qquad [3.32]$$

d) váhu aritmetického průměru p_x

$$p_x = [p] \qquad [3.33]$$

4.4.3. měřické dvojice

Velmi častým případem vyrovnání jsou měřické dvojice (dvojí měření délky, úhlu). Při odvození vycházíme z pozorování přímých stejné váhy.

o_1, o_2 výsledky jednotlivých pozorování
x vyrovnaná hodnota
v_1, v_2 opravy $v_1 = x - o_1,\ v_2 = x - o_2$
d diference $d = o_1 - o_2$

$$x = \frac{o_1 + o_2}{2} \qquad [3.34]$$

$$v_1 = x - o_1 = \frac{o_1 + o_2}{2} - o_1 = \frac{o_1 + o_2 - 2o_1}{2} = -\frac{o_1 - o_2}{2} = -\frac{d}{2} \qquad [3.35]$$

$$v_2 = x - o_2 = \frac{o_1 + o_2}{2} - o_2 = \frac{o_1 + o_2 - 2o_2}{2} = +\frac{o_1 - o_2}{2} = +\frac{d}{2} \qquad [3.36]$$

$$[vv] = \frac{d^2}{4} + \frac{d^2}{4} = \frac{d^2}{2} = \min. \qquad [3.37]$$

a) střední chyba jednotlivého pozorování

$$m = \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}} = \sqrt{\frac{\frac{d^2}{2}}{1}} = \frac{|d|}{\sqrt{2}} \qquad [3.38]$$

b) střední chyba aritmetického průměru

$$m_x = \frac{m}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{[vv]}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{\frac{d^2}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{d^2}{4}} = \frac{|d|}{2} \qquad [3.39]$$

Příklad 4.1: Teodolit má udávánu přesnost měřeného směru v jedné skupině $m = 0{,}0004^{g}$.
V kolika skupinách musíme měřit, aby směr měl přesnost m_x
a) $0{,}0002^{g}$ b) $0{,}0001^{g}$ c) $0{,}00005^{g}$

Řešení : podle vzorce [3.23] $m_x^2 = \dfrac{m^2}{n} \rightarrow n = \dfrac{m^2}{m_x^2}$

a) $n = \dfrac{4^2}{2^2} = 4\,\text{skupiny}$ b) $n = \dfrac{4^2}{1^2} = 16\,\text{skupin}$ c) $n = \dfrac{4^2}{0{,}5^2} = 64\,\text{skupin}$

Příklad 4.2: Úhel byl zaměřen v 6 skupinách. Vypočtěte vyrovnanou hodnotu x, střední chybu jednoho měření m a střední chybu aritmetického průměru m_x .

Řešení :

i	o			δ	v	vv
	°	′	″	″	″	″
1	47	46	35	15	-4	16
2			30	10	+1	1
3			28	8	+3	9
4			31	11	0	0
5			33	13	-2	4
6			29	9	+2	4
[ ]	47	46	20	66	0	34

zvolíme základní hodnotu $x_0 = 47°46'20''$ a výpočet provedeme podle upraveného vzorce

[3.17] $$x = x_0 + \frac{[\delta]}{n} = 47°46'20'' + \frac{66''}{6} = 47°46'31''$$

$$m = \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}} = \sqrt{\frac{34''}{5}} = 2{,}6'' \qquad m_x = \frac{m}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{[vv]}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{34''}{6 \cdot 5}} = \sqrt{\frac{34''}{30}} = 1{,}1''$$

$x \pm m_x = 47°46'31'' \pm 1{,}1''$

Příklad 4.3: Teodolit 1 má udávánu přesnost měřeného směru v jedné skupině $m_1 = 0{,}0004^{g}$.
Teodolit 2 má udávánu přesnost měřeného směru v jedné skupině $m_2 = 0{,}0014^{g}$.
V kolika skupinách musíme měřit teodolitem 2, aby směr měl rovnocennou přesnost s teodolitem 1?

Řešení : podle vzorce [3.14]

$$p_1 : p_2 = \frac{k}{\bar{m}_1^2} : \frac{k}{\bar{m}_2^2} \quad \rightarrow \quad p_1 \cdot \bar{m}_1^2 = p_2 \cdot \bar{m}_2^2 = k$$

$$4^2 p_1 = 14^2 p_2 = k$$

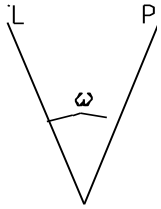
pokud zvolíme $k = 14^2 = 196$ $\rightarrow$ $p_2 = 1$

$$16 p_1 = 196$$

$$p_1 = 12$$

Teodolitem 2 je potřeba měřit směr ve 12 skupinách, aby měření bylo rovnocenné s měřením teodolitem 1 v jedné skupině.

Poznámka: Výrobci uvádějí v prospektech přesnost danou střední chybou měření ve směru. Střední chyba v úhlu se vypočte pomocí zákona hromadění středních chyb. Pokud jsou směry měřeny se stejnou střední chybou ($m_l = m_p = m$)



$$\omega = P - L$$

$$m_\omega = \sqrt{m_l^2 + m_p^2} = m \cdot \sqrt{2}$$

$$m = 0{,}0004^g \rightarrow m_\omega = 0{,}0004^g \cdot \sqrt{2} = 0{,}0006^g$$

Příklad 4.4: Vypočtěte výšku bodu P, která byla určena čtyřmi nivelačními pořady (váha měření $p_i = \frac{1}{s_i}$), vyrovnanou hodnotu x, střední chybu jednotlivého měření m_i, střední chybu jednotkovou m_0 a střední chybu aritmetického průměru m_x.

Řešení:

i	o	s	p	δ	$p\delta$	v	pv	pvv
	m	km			mm	mm		
1	222,726	0,5	2,000	6	12,000	9	18	162,000
2	222,752	1,6	0,625	32	20,000	-17	-10,625	180,625
3	222,741	1,2	0,833	21	17,493	-6	-4,998	29,988
4	222,738	1,0	1,000	18	18,000	-3	-3	54,000
[ ]	x_0 = 222,720		4,458	66	67,493		≈0	426,613

zvolíme základní hodnotu x_0 = 222,720 m a výpočet provedeme podle upraveného vzorce [3.28]

$$x = x_0 + \frac{[p\delta]}{[p]} = 222{,}720 \text{ m} + \frac{67{,}493}{4{,}458} \text{ mm} = 222{,}735 \text{ m}$$

podle vzorce [3.30] $m_i = \sqrt{\dfrac{[pvv]}{p_i(n-1)}}$

$$m_1 = \sqrt{\frac{426{,}613}{2{,}000 \cdot 3}} = 8{,}4 \text{ mm}; \quad m_2 = \sqrt{\frac{426{,}613}{0{,}625 \cdot 3}} = 15{,}1 \text{ mm};$$

$$m_3 = \sqrt{\frac{426{,}613}{0{,}833 \cdot 3}} = 13{,}1 \text{ mm}; \quad m_4 = \sqrt{\frac{426{,}613}{1{,}000 \cdot 3}} = 11{,}9 \text{ mm}$$

podle vzorce [3.31] $m_0 = \sqrt{\frac{[pvv]}{n-1}}$ $\quad m_0 = \sqrt{\frac{426{,}613}{3}} = 11{,}9$ mm

podle vzorce [3.32] $m_x = \sqrt{\frac{[pvv]}{[p](n-1)}}$ $\quad m_x = \sqrt{\frac{426{,}613}{4{,}458 \cdot 3}} = 5{,}6$ mm

$x \pm m_x = 222{,}735$ m ± 5,6 mm

Příklad 4.5: Vzdálenost byla změřena 2krát. Vypočtěte vyrovnanou hodnotu *x*, střední chybu jednoho měření *m* a střední chybu aritmetického průměru m_x .

Řešení :

i	o	δ	d	v	vv
	m	mm	mm	mm	
1	146,732	2		39	1521
2	146,810	80		-39	1521
[ ]	x_0 = 146,730	82	-78	0	3042

zvolíme základní hodnotu x_0 = 146,730 m a výpočet provedeme podle upraveného vzorce [3.34]

$$x = x_0 + \frac{\delta_1 + \delta_2}{2} = 146{,}730 \text{ m} + 0{,}041\text{m} = 146{,}771 \text{ m}$$

podle vzorce [3.38]

$$m = \sqrt{\frac{[vv]}{n-1}} = \sqrt{\frac{\frac{d^2}{2}}{1}} = \frac{|d|}{\sqrt{2}} \qquad m = \frac{78}{\sqrt{2}} = 55{,}2 \text{ mm}$$

podle vzorce [3.39]

$$m_x = \frac{m}{\sqrt{n}} = \sqrt{\frac{[vv]}{n(n-1)}} = \sqrt{\frac{\frac{d^2}{2}}{2}} = \sqrt{\frac{d^2}{4}} = \frac{|d|}{2}$$

$$m_x = \frac{78}{2} = 39 \text{ mm}$$

Literatura:

- BURŠÍK, A. , PROCHÁZKA, F. *Geodetické počtářství*. 2. přepracované vydání. Praha : Kartografie, 1979.